UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

CC2 du 11/02/2019 (durée 20mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Questions de cours. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, ainsi que $(T_n)_n$ une suite de distributions sur Ω. On se donne une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Expliquer ce que signifie l'affirmation selon laquelle $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.

Cela signifie : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ *lorsque* $n \to +\infty$.

Exercice I. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \ln |x|$ pour $x \neq 0$.

I.1) Montrer que cette fonction définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

La fonction f *est localement intégrable sur* $\mathbb{R}$. *En effet, pour* $R \in [1, +\infty[$, *on a :*

$$\int_{-R}^{+R} |\ln |x||dx = 2 \int_0^{+R} |\ln x|dx \leq -2 \int_0^1 \ln x dx + 2R \ln R \leq 2 + 2R \ln R < +\infty.$$

Or toute fonction f *dans* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *s'identifie à un élément* $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

I.2) Déterminer l'ordre de cette distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

C'est zéro ! Il suffit de noter que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *qui est à support dans le compact* $[-R, R]$, *on a :*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \parallel \varphi \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})}, \qquad C := \int_{-R}^{+R} |\ln |x||dx < +\infty.$$

I.3) Quelle est la dérivée T' de la distribution T ?

C'est la distribution "valeur principale". Autrement dit

$$T' = vp\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad \langle T', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon \leq |x|} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

On peut le vérifier en testant contre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big(-\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)dx \Big) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big(-[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)] \ln \varepsilon + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &\qquad -[\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \Big).\end{aligned}$$

Comme

$$\exists\, c_\varepsilon^\pm \in]-\varepsilon, \varepsilon[\,; \qquad [\varphi(\pm\varepsilon) + \varphi(0)] \ln \varepsilon = \varphi'(c_\varepsilon^\pm)\varepsilon \ln \varepsilon = o(1),$$

on récupère le résultat en passant à la limite.

Exercice II. Donner un exemple de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui est d'ordre $+\infty$.

Cela a été vu en TD. Par exemple, la distribution $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n^{(n)}$ est d'ordre $-\infty$. Intuitivement, elle est d'ordre n sur chaque intervalle $]n - 1/2, n + 1/2[$.

Exercice III. Soit $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution définie par $T_n(x) = 0$ si $x \leq 0$ et par $T_n(x) = n\sin(nx)$ si $x > 0$. La suite $(T_n)_n$ converge vers une masse de Dirac.

OUI

Soit $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On calcule par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\langle T_n, \varphi\rangle &= \int_0^{+\infty} n\sin(nx)\varphi(x)dx = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}[\cos(nx)]\varphi(x)dx \\ &= -\Big[\cos(nx)\Big]\varphi(x)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi(x)dx = \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi(x)dx \\ &\hspace{20em} \to \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle\end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme de Riemann-Lebesgue ou une seconde intégration par parties pour récupérer $\varphi(0)$.

Exercice IV. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définie pour $(x, y) \neq (0, 0)$ par $f(x + iy) = (x + iy)^{-1}$, et pour $(x, y) = (0, 0)$ par $f(0, 0) = 0$.

IV.1) La fonction f permet de définir un élément $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui est d'ordre 0.

OUI

Il suffit de remarquer que f est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$ ce qui résulte d'un passage en coordonnées polaires :

$$\int_{B(0,R]} |f(x, y)|dxdy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{-1} r dr d\theta = 2\pi R < +\infty.$$

IV.2) On pose $\tilde{\partial} := \dfrac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Déterminer (sans justification) ce que vaut :

$\langle \tilde{\partial} T_f, \varphi \rangle = \pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Par définition, on a :

$$\langle \tilde{\partial} T_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \tilde{\partial}\varphi \rangle = -\frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)(\partial_x \varphi + i\partial_y \varphi)(x,y)dxdy.$$

On passe en coordonnées polaires, ce qui revient à travailler avec :

$$\tilde{\varphi}(r,\theta) := \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

On a :

$$\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) := \cos\theta \ \partial_x \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \ \partial_y \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta),$$
$$\partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) := -r\sin\theta \ \partial_x \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \ \partial_y \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Cela permet d'exprimer $\partial_x \varphi$ et $\partial_y \varphi$ en fonction de $\partial_r \tilde{\varphi}$ et de $\partial_\theta \tilde{\varphi}$, ce qui donne (pour R choisi assez grand) :

$$\langle \tilde{\partial} T_f, \varphi \rangle = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{e^{-i\theta}}{r} \Big(e^{i\theta} \partial_r \tilde{\varphi} + i \frac{e^{i\theta}}{r} \partial_\theta \tilde{\varphi} \Big)(r,\theta) r dr d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^R \partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) dr \Big) d\theta - \frac{i}{2} \int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} \partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) d\theta \Big) dr$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(0,0) d\theta = \pi \varphi(0,0).$$