UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

CC2 du 07/02/2018 (durée 30mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Dans ce qui suit, la fonction $\varrho(\cdot)$ désigne une fonction plateau, positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$, valant 1 sur $]-1/2, 1/2[$, et 0 hors de $]-1, 1[$. Etant donné $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varrho_r(x) := \varrho(x/r)$.

1) Faire un dessin de $\varrho_r(\cdot)$ pour $r \ll 1$.

2) Faire un dessin de $\varrho_r(\cdot)$ pour $r \gg 1$.

Question de cours. Donner la définition de ce qu'est une distribution T sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice I. Etant donnée une forme linéaire $T : \mathcal{D} := \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que T est continue pour $\mathcal{D}$ muni de la norme uniforme si :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^* \,; \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\,, \qquad |T(\varphi)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,. \tag{1}$$

1) L'application T qui à $\varphi \in \mathcal{D}$ associe $T(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$ est continue pour $\mathcal{D}$ muni de la norme uniforme.

OUI - NON

2) L'application T définie en 1) est une distribution d'ordre fini.

OUI - NON

Exercice II. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On fixe $l \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.

II.1) Rappeler la formule de Leibniz poussée à l'ordre l pour le produit $\varrho_r\, \varphi$.

$(\varrho_r\, \varphi)^{(l)}(x) \;=$

II.2.b) On suppose que $\varphi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0. Alors, pour tout entier $l \leq m$, on a $\lim_{r\to 0} \sup_{|x|\leq r} |(\varrho_r\, \varphi)^{(l)}(x)| = 0$.

OUI - NON

Exercice III. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution vérifiant :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}_+^*\,, \qquad T\big((1-\varrho_r)\,\varphi\big) = 0\,. \tag{2}$$

III.1) La distribution T est d'ordre fini.

OUI - NON

III.2) On suppose que T est d'ordre $l \in \mathbb{N}$ fini. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(x) = o(x^l)$ au voisinage de 0. Montrer à l'aide de l'exercice II que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

III.3) On suppose toujours que T est d'ordre $l \in \mathbb{N}$ fini. Prouver l'existence de nombres a_0, a_1, $\cdots$, a_l ajustés de façon à ce que :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \qquad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{l} a_k\ \varphi^{(k)}(0)\,. \tag{3}$$