# CC2 (12 mars 2024)

## Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

**Nom :** **Prénom :** **Gp de TD :**

**Questions de cours**. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ avec $c < d$. On se donne un difféomorphisme $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ de classe $C^1$ vérifiant $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$. On considère par ailleurs deux fonctions $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, ainsi qu'une fonction continue $f : [c,d] \to \mathbb{R}$.

**1**. Ecrire la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)\ v'(x)\ dx =$$

**2**. Ecrire la formule de changement de variables :

$$\int_a^b f \circ \varphi(x)\ \varphi'(x)\ dx =$$

**Exercice 1.** Déterminer les primitives $F$ des fonctions $f$ suivantes.

$f(x) = 4\,x^3 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 7\,,$ $\qquad F(x) =$

$f(x) = 2\ \cos x - 3\ \sin(3\,x)\,,$ $\qquad F(x) =$

$f(x) = e^{2\,x} - \dfrac{1}{1+x^2}\,,$ $\qquad F(x) =$

**Exercice 2.** A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur des intégrales suivantes.

$\star$ En posant $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$, trouver :

$$\int_0^1 \arctan x\ dx =$$

$\star$ On rappelle que $(x\ \ln x - x)' = \ln x$. En posant $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$, trouver :

$$\int_1^e (\ln x)^2\ dx =$$

**T. S. V.** $\Longrightarrow$

**Exercice 3.** En reconnaissant la somme de Riemann d'une fonction à déterminer, calculer la limite $\ell$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\,\sqrt{n}}$$

**Exercice 4.** En effectuant le changement de variables $x = \ln t$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^e \frac{dt}{2\,t\,\ln t + t} =$$

**Exercice 5.** Trouver une primitive $F$ des fonctions $f$ suivantes. Justifier les réponses.

$\star$ $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x-1)}$ *On pourra décomposer en éléments simples* $f(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x-1}$.

$\star$ $f(x) = (\cos x)^3\,(\sin x)^2$ *On pourra écrire* $f(x) = \cos x\, P(\sin x)$ *avec* $P$ *polynôme.*