CC2 (19 mars 2024) - Corrigé.

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Questions de cours. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ avec $c < d$. On se donne un difféomorphisme $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ de classe C^1 vérifiant $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$.

1. Ecrire la formule d'intégration par parties :

cf cours.

2. Ecrire la formule de changement de variables :

cf cours.

Exercice 1. Déterminer les primitives F des fonctions f suivantes.

$f(x) = 5\,x^3 - 3\,x + 7\,,$ $\qquad F(x) = \dfrac{5\,x^4}{4} - \dfrac{3\,x^2}{2} + 7\,x + C$

$f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^3}\,,$ $\qquad F(x) = 10\,\sqrt{x} - 3\,\ln|x| - \dfrac{1}{x^2}$

$f(x) = 2\,\cos x - 3\,\sin(3\,x)\,,$ $\qquad F(x) = 2\,\sin x + \cos(3\,x)$

$f(x) = e^{2\,x} - \dfrac{1}{1+x^2}\,,$ $\qquad F(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{2\,x} - \arctan x$

Exercice 2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur des intégrales suivantes.

$\star$ En posant $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$, trouver :

On obtient $u'(x) = 1/(1+x^2)$ *et* $v(x) = x$ *de sorte que*

$$\int_0^1 \arctan x\; dx = \left[x\,\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2\,x}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\,\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

$\star$ On rappelle que $(x\,\ln x - x)' = \ln x$. En posant $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$, trouver :

On obtient $u'(x) = 2\,\ln x/x$ *et* $v(x) = x$ *de sorte que*

$$\int_1^e (\ln x)^2\; dx = \left[x\,(\ln x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = e - 2\left[x\,\ln x - x\right]_1^e = e - 2$$

Exercice 3. Trouver une primitive F des fonctions f suivantes. Justifier les réponses.

$\star$ $f(x) = \dfrac{1}{x\ (x-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$

On décompose la fraction en éléments simples comme ci-dessus puis on intègre

$F(x) = \ln|x-1| - \ln|x| = \ln|1 - \dfrac{1}{x}|$

$\star$ $f(x) = (\cos x)^3\ (\sin x)^2 = \cos x\ (1 - (\sin x)^2)\ (\sin x)^2$

On écrit le produit comme ci-dessus puis on effectue le changement de variables $y = \sin x$ *ce qui donne avec* $dy = \cos x\, dx$

$F(x) = \displaystyle\int (1 - y^2)\, y^2\, dy = \frac{1}{3}\, y^3 - \frac{1}{5}\, y^5 = \frac{1}{3}\, (\sin x)^3 - \frac{1}{5}\, (\sin x)^5$

Exercice 4. En reconnaissant la somme de Riemann d'une fonction à déterminer, calculer la limite ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\ \sqrt{n}} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}}$

On reconnait la somme de Riemann construite en prenant une subdivision régulière de $[0, 1]$ *et en approchant l'intégrale de la fonction* $\sqrt{x}$*. On a donc*

$\ell = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = [\frac{2}{3}\, x^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{3}$

Exercice 5. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \min(t; 1)\, dt$. Calculer $F(x)$ dans les cas suivants :

Pour $x \leq 1$, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\, dt = x^2/2$

Pour $x \geq 1$, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t\, dt + \int_1^x 1\, dt = 1/2 + (x-1) = x - 1/2$

Exercice 6. En effectuant le changement de variables $x = \ln t$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^e \frac{dt}{2\, t\, \ln t + t}\ dt = \int_1^e \frac{1}{2\, \ln t + 1}\, \frac{dt}{t}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{2\, x + 1}\, dx = \frac{1}{2}\, [\ln(2\, x + 1)]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$$