UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse appliquée

CC2 - Le 15/03/2024 - 1h

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Questions de cours. Soit $x' = f(t, x)$ un système de n équations différentielles ordinaires impliquant $f \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Q1. Soit $x : [0, T_m[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale. Que dit le critère d'explosion ?

cf cours

Q2. On suppose que la fonction f ne dépend pas de t. Que signifie de dire que $a \in \mathbb{R}^n$ est un *point d'équilibre stable* ?

cf cours

Exercice 1. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Résoudre (au sens de décrire *toutes* les solutions) les problèmes suivant impliquant des EDOs (donner le résultat sans justifier les réponses).

1.1. $(1 + t^2)\ y' = 1 + y^2$. $\quad y(t) = \tan(\arctan t + C)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

1.2. $y' + t\,y = 0$ $\quad y(t) = C\,e^{-t^2/2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

1.3. $y' + t\,y = -t$ avec $y(0) = 0$. $\quad y(t) = e^{-t^2/2} - 1$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle $y' = y\,(\sin y)^2$.

2.1. Quelles sont les solutions stationnaires de cette équation ?

$y(t) = k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.2. On fixe $y_0 \in]0, \pi[$. On note y la solution maximale associée à la donnée initiale y_0. En comparant y aux solutions stationnaires, expliquer pourquoi y reste bornée.

y ne peut pas croiser les deux solutions stationnaires que sont $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = \pi$. On a donc :

$$0 < y(t) < \pi\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

2.3. Expliquer pourquoi y est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

D'après le critère d'explosion, y ne peut pas restée bornée si $T_m < +\infty$. Donc $T_m = +\infty$.

2.4. Montrer que la fonction y est croissante puis prouver que y admet une limite finie (à déterminer) en $+\infty$.

Comme $0 < y$, le terme source est positif, et donc la solution est croissante. Comme elle est majorée par π, elle admet une limite ℓ (pour $t \to +\infty$) avec $\ell \leq \pi$. Par TAF :

$$\exists \theta_t \in]t, t+1[\,, \qquad y(t+1) - y(t) = y'(\theta_t) = y(\theta_t)\ \sin^2 y(\theta_t)\,.$$

On passe à la limite (pour $t \to +\infty$) ce qui donne

$$\ell - \ell = 0 = y'(\ell) = \ell\ (\sin \ell)^2\,, \qquad 0 < y_0 \leq \ell \leq \pi\,.$$

Ce n'est possible que si $\ell = \pi$.

Exercice 3. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le système d'EDOs suivant :

$$\frac{dX}{dt} = A\,X\,, \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

On suppose que les valeurs propres λ et μ sont réelles. On rappelle que les trajectoires sont les courbes de $\mathbb{R}^2$ données par $\gamma := \{\, X(t)\,;\, t \in \mathbb{R}_+ \,\}$, et qu'une flèche permet d'indiquer son sens de parcours. Tracer un flot dans le plan, c'est représenter ces trajectoires fléchées sur un dessin.

3.1. On suppose $0 < \lambda < \mu$. Tracer le flot dans un repère orthonormé (avec x_1 en abscisse et x_2 en ordonnée).

cf cours

3.2. On suppose $\lambda < 0 < \mu$. Tracer le flot dans un repère orthonormé (avec x_1 en abscisse et x_2 en ordonnée).

cf cours

Exercice 4. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le système d'EDOs suivant

$$\frac{dX}{dt} = A\,X\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

4.1. Montrer que la matrice A est diagonalisable, et en déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Les valeurs propres sont $+i$ et $-i$ associées respectivement aux vecteurs propres ${}^t(1, -i)$ et ${}^t(1, i)$.

4.2. En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de ce système d'EDOs.

Les solutions à valeurs complexes forment un $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* 2 *décrit par*

$$\alpha\ e^{i\,t}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}+\beta\ e^{-i\,t}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},\qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\,.$$

4.3. En déduire l'ensemble des solutions à valeurs réelles de ce système d'EDOs.

Pour $\alpha=1$ *et* $\beta=0$*, en prenant la partie réellle puis imaginaire, on récupère les solutions* ${}^t(\cos t,\sin t)$ *et* ${}^t(\sin t,-\cos t)$ *qui sont linéairement indépendantes. Les solutions à valeurs réelles forment un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 2 *décrit par*

$$\begin{pmatrix}\alpha\ \cos t+\beta\ \sin t\\ \alpha\ \sin t-\beta\ \cos t\end{pmatrix},\qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\,.$$