Université de Rennes

Distribution et ANalyse de Fourier

Corrigé du CC1

Exercice I *[Sur les fonctions test].* Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test.

I.1) Rappeler la définition de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv C_c^\infty(\mathbb{R}) = \Big\{ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, \psi \textit{ est de classe } C^\infty \textit{ et à support compact} \Big\}$$

I.2) Trouver toutes les solutions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de l'équation $\varphi' + \varphi = 0$.

$\varphi \equiv 0.$

L'EDO fournit en effet $\varphi(x) = C\ e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ qui est à support compact seulement pour $C = 0$.

I.3) Déterminer (sans justification) une condition nécessaire et suffisante (qui est notée CNS) portant sur $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi' + \varphi = \psi$.

$CNS : \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t\ \psi(t)\ dt = 0.$

Les solutions sont de la forme

$$\varphi(x) = C\, e^{-x} + e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^t \psi(t)\, dt\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Comme ψ est à support compact, on peut trouver $R > 0$ tel que $\operatorname{supp} \psi \subset [-R, R]$. Pour $x < -R$, on a $\varphi(x) = C\, e^{-x}$ qui est à support compact (pour x très négatif) uniquement si $C = 0$. Ensuite (sachant $C = 0$), on a

$$\varphi(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{R} e^t \psi(t)\, dt\,, \qquad x > R\,.$$

La fonction φ s'annule pour x grand sous réserve d'avoir la CNS ci-dessus.

Exercice II *[Sur le support des distributions]* . Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution d'ordre zéro dont le support est contenu dans le singleton $\{0\}$.

II.1) Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test qui vaut un sur un voisinage de 0. Expliquer pourquoi on a $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\, \varphi \rangle$.

Par linéarité, on a $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\, \varphi \rangle + \langle T, (1-\chi)\, \varphi \rangle$. *Par ailleurs, la fonction* $(1-\chi)\, \varphi$ *est à support compact, et elle vérifie*

$$\text{supp } (1-\chi)\, \varphi \subset \text{supp } (1-\chi) \cap \text{supp } \varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Cela implique, puisque le support de T *est contenu dans* $\{0\}$, *que* $\langle T, (1-\chi)\, \varphi \rangle = 0$.

II.2) Peut-on trouver un élément $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui est nul en 0 et tel que $\langle T, \varphi \rangle$ soit non nul ? Justifier la réponse. *Indication : Penser à exploiter la relation* $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi_n\, \varphi \rangle$ *qui est valable pour* $\chi_n(x) := \chi(n\, x)$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$.

NON.

Comme χ_n *vaut un sur un voisinage de* 0, *d'après ce qui précède, on a*

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi_n\, \varphi \rangle, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Par ailleurs, comme T *est d'ordre zéro, on a (pour* R *assez grand)*

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+\, ; \quad |\langle T, \chi_n\, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in [-R/n, R/n]} |\chi_n(x)\, \varphi(x)|, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour n *qui tend vers* $+\infty$, *on récupère*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \ \parallel \chi \parallel_\infty \ |\varphi(0)| = 0.$$

Exercice III *[Sur la définition d'une distribution et de sa dérivée]*. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \ln|x|$ pour $x \neq 0$.

III.1) Expliquer pourquoi f définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre zéro.

La fonction f *est localement intégrable sur* $\mathbb{R}$. *En effet, pour* $R \in [1, +\infty[$, *on a :*

$$\int_{-R}^{+R} |\ln|x||dx = 2 \int_0^{+R} |\ln x| dx \leq -2 \int_0^1 \ln x dx + 2R \ln R \leq 2 + 2R \ln R < +\infty.$$

Or toute fonction f *dans* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *s'identifie à un élément* $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Par ailleurs, pour toute fonction test* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *qui est à support dans le compact* $[-R, R]$, *on a :*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \parallel \varphi \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})}, \qquad C := \int_{-R}^{+R} |\ln|x||dx < +\infty,$$

ce qui montre que T *est d'ordre zéro.*

III.2) Compléter l'identité ci-dessous.

$$\langle T', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x| \; \varphi'(x) \; dx \,, \qquad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

III.3) Identifier la dérivée T' de la distribution T. Justifier la réponse.

C'est la distribution "valeur principale". Autrement dit

$$T' = vp\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad \langle T', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \quad \int_{\varepsilon \leq |x|} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

On peut le vérifier en testant contre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big(-\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x) \varphi'(x) dx \Big) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big(-\big[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)\big] \ln \varepsilon + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\
&\qquad -\big[\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)\big] \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \Big).
\end{aligned}$$

Comme

$$\exists \, c_\varepsilon^\pm \in] - \varepsilon, \varepsilon[\,; \qquad \big[\varphi(\pm\varepsilon) + \varphi(0)\big] \ln \varepsilon = \varphi'(c_\varepsilon^\pm) \varepsilon \ln \varepsilon = o(1),$$

on récupère le résultat en passant à la limite.

Exercice IV *[Sur la convolution]*. On note $\star$ le produit de convolution.

IV.1) Quel est le nom de l'inégalité (et son cadre d'application) qui permet d'affirmer que $\big(L^1(\mathbb{R}), \star\big)$ est une algèbre ?

Inégalité de Young : $L^p \star L^q \subset L^r$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$ avec ici $p = q = r = 1$.

IV.2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pourquoi peut-on trouver $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \, dx < 1$?

C'est une conséquence du théorème de convergence dominée appliqué à la suite $(f_n)_n$ avec $f_n(x) := \mathbb{1}_{[-1/n, 1/n]}(x) \, f(x)$ qui converge simplement vers $\bar{f} \equiv 0$ et est majorée uniformément par $|f| \in L^1(\mathbb{R})$. Pour n assez grand (disons $n \geq N$), cela donne

$$\int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - \bar{f}(x)| \; dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x)| \; dx < \frac{1}{2}\,.$$

IV.3) Soit g la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$, c'est-à-dire $g := \mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}$. Montrer qu'on a $|f \star g(0)| < 1$.

$$|f \star g(0)| = |\int_{\mathbb{R}} f(0-t)\, g(t)\ dt| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(t)|\ dt < 1\,.$$

IV.4) En raisonnant par l'absurde, déduire de ce qui précède que l'algèbre $\Big(L^1(\mathbb{R}), \star\Big)$ n'admet pas d'élément neutre.

Supposons l'existence d'un élément neutre $f \in L^1(\mathbb{R})$. On applique la procédure décrite ci-dessus. On doit avoir $f \star g \equiv g$ ce qui conduit à la contradiction

$$1 = g(0) = |f \star g(0)| < 1\,.$$

Exercice V *[Sur la limite d'une suite de distributions].*

V.1) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+}\ \varepsilon \displaystyle\int_{-A}^{+A} |x|^{\varepsilon - 1}\ \Big[\varphi(x) - \varphi(0)\Big]\ dx = 0$.

La fonction $x \mapsto |x|^{-1}\ \Big[\varphi(x) - \varphi(0)\Big]$ est continue donc bornée (disons par M) sur l'intervalle $[-A, A]$, d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{-A}^{+A} |x|^{\varepsilon-1}\ \Big[\varphi(x) - \varphi(0)\Big]\ dx\ &= \varepsilon \int_{-A}^{+A} |x|^{\varepsilon}\ \frac{\Big[\varphi(x) - \varphi(0)\Big]}{|x|}\ dx \\
&\leq 2\ \varepsilon \left(\sup_{x \in [-A,A]} \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{|x|} \right)\ \int_0^A x^{\varepsilon}\, dx \\
&\leq \frac{2\ \varepsilon}{1+\varepsilon}\ A^{1+\varepsilon}\ M = O(\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

V.2) Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_\varepsilon(x) = \varepsilon\, |x|^{\varepsilon-1}/2$. Montrer que la famille de distributions $(T_{f_\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ admet une limite (au sens des distributions) lorsque le paramètre ε tend vers 0 (par valeurs positives), et l'identifier.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $[-A, A]$ avec $A \in \mathbb{R}_+$. On écrit

$$\langle T_{f_\varepsilon}, \varphi \rangle = \int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{2}\, |x|^{\varepsilon-1}\ \Big[\varphi(x) - \varphi(0)\Big]\ dx + \varphi(0)\ \int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{2}\, |x|^{\varepsilon-1}\ dx.$$

D'après la question V.1), la première intégrale tend vers 0 pour $\varepsilon \to 0+$. Il reste

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle T_{f_\varepsilon}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}\ \varphi(0)\ \int_0^{+A} \varepsilon\, |x|^{\varepsilon-1}\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\ \varphi(0)\ \Big[x^{\varepsilon}\Big]_0^{+A} = \varphi(0)\ \lim_{\varepsilon \to 0}\ A^{\varepsilon} = \varphi(0)$$

ce qui montre que la limite existe et vaut δ_0.

Exercice VI *[Calcul de la dérivée d'une distribution].* On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \arctan(1/x)$ qui, étant bornée, définit une distribution T_f. En utilisant une intégration par parties, identifier T_f' (justification demandée).

$T'_f := -\dfrac{1}{1+x^2} + \pi\,\delta_0$

En isolant la singularité en 0*, on a en effet*

$$\langle T'_f, \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{0} \arctan\Big(\frac{1}{x}\Big)\ \varphi'(x)\ dx - \int_{0}^{+\infty} \arctan\Big(\frac{1}{x}\Big)\ \varphi'(x)\ dx\,,$$

ce qui donne après intégration par parties

$$\langle T'_f, \varphi\rangle = -\Big[\arctan\Big(\frac{1}{x}\Big)\,\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{0} - \Big[\arctan\Big(\frac{1}{x}\Big)\,\varphi(x)\Big]_{0}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\arctan\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big]'\ \varphi(x)\ dx$$

ou encore comme annoncé

$$\langle T'_f, \varphi\rangle = \frac{\pi}{2}\ \varphi(0) + \frac{\pi}{2}\ \varphi(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\varphi(x)\ dx.$$

Cela se visualise sur le graphe de f *qui est décroissante partout hors de* 0 *avec un saut de* π *en* 0*.*