Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

CC1 du 04/10/2024 (durée 1h)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Questions de cours

i) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. Rappeler comment est définie la distribution T_f qui est canoniquement associée à f.

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \qquad\qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,.$$

I.2) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Sous quelles conditions peut-on affirmer que T est une distribution ?

Exercice I. On considère la forme linéaire $S : \mathcal{D}(]-1,1[) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle S, \varphi \rangle := \int_{-1}^{0} \varphi'(t)\ dt - \int_{0}^{1} \varphi'(t)\ dt\,, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)\,.$$

I.1) Montrer que S est une distribution qui est positive et d'ordre 0.

I.2) Déterminer le support de S. Justifier la réponse.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice II. On considère dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n(x) := n\ \mathbb{1}_{[-2,2]}(n\,x)$ où la notation $\mathbb{1}_{[a,b]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge au sens des distributions vers un élément $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à identifier.

Exercice III. Calculer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions $(T_n)_n$ donnée par $T_n := (1/n) \sum_{p=0}^{n-1} \delta_{p/n}$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice IV. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\varphi \neq 0$. A l'aide de φ, on construit une suite $(\varphi_n)_n$, et on considère l'affirmation suivante :

La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Répondre par OUI ou par NON (entourer la bonne réponse et barrer la mauvaise) à cette affirmation puis donner une justification dans les différents cas suivants :

a) $\varphi_n(x) = \dfrac{\varphi(x)}{n}$ **OUI** **NON**

b) $\varphi_n(x) = \dfrac{\varphi(x/n)}{n}$ **OUI** **NON**

c) $\varphi_n(x) = \dfrac{\varphi(n\,x)}{n}$ **OUI** **NON**

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice V. On se place dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

V.1) Montrer que la formule suivante

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \Big(\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t) \Big)\, dt$$

définit une distribution qui est d'ordre au plus 1.

V.2) Décrire le support de T. On ne demande pas de justification.