Université de Rennes

Distribution et ANalyse de Fourier

CC1 du 06/10/2023 (durée 1h)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Exercice I *[Sur les fonctions test]*. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test.

I.1) Rappeler la définition de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}) =$

I.2) Trouver toutes les solutions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de l'équation $\varphi' + \varphi = 0$.

$\varphi =$

I.3) Déterminer (sans justification) une condition nécessaire et suffisante (qui est notée CNS) portant sur $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi' + \varphi = \psi$.

CNS :

Exercice II *[Sur le support des distributions]* . Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution d'ordre zéro dont le support est contenu dans le singleton $\{0\}$.

II.1) Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test qui vaut un sur un voisinage de 0. Expliquer pourquoi on a $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\, \varphi \rangle$.

II.2) Peut-on trouver un élément $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui est nul en 0 et tel que $\langle T, \varphi \rangle$ soit non nul ? Justifier la réponse. *Indication : Penser à exploiter la relation* $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi_n\, \varphi \rangle$ *qui est valable pour* $\chi_n(x) := \chi(n\, x)$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice III *[Sur la définition d'une distribution et de sa dérivée]*. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \ln|x|$ pour $x \neq 0$.

III.1) Expliquer pourquoi f définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre zéro.

III.2) Compléter l'identité ci-dessous.

$$\langle T', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \ln|x| \qquad\qquad dx\,, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

III.3) Identifier la dérivée T' de la distribution T. Justifier la réponse.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice IV *[Sur la convolution]*. On note $\star$ le produit de convolution.

IV.1) Quel est le nom de l'inégalité (et son cadre d'application) qui permet d'affirmer que $\left(L^1(\mathbb{R}),\star\right)$ est une algèbre ?

Inégalité de

IV.2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pourquoi peut-on trouver $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx < 1$?

IV.3) Soit g la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$, c'est-à-dire $g := \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}$. Montrer qu'on a $|f \star g(0)| < 1$.

IV.4) En raisonnant par l'absurde, déduire de ce qui précède que l'algèbre $\left(L^1(\mathbb{R}),\star\right)$ n'admet pas d'élément neutre.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice V *[Sur la limite d'une suite de distributions].* Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

V.1) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon \int_{-A}^{+A} |x|^{\varepsilon - 1} \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] dx = 0.$

V.2) Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_\varepsilon(x) = \varepsilon \, |x|^{\varepsilon-1}/2$. Montrer que la famille de distributions $(T_{f_\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ admet une limite (au sens des distributions) lorsque le paramètre ε tend vers 0 (par valeurs positives), et l'identifier.

Exercice VI *[Calcul de la dérivée d'une distribution].* On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \arctan(1/x)$ qui, étant bornée, définit une distribution T_f. En utilisant une intégration par parties, identifier T_f' (justification demandée).