UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

CC1 du 27/01/2020 (durée 20mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une indication de preuve. Si c'est* NON, *donner un contre-exemple ou expliquer pourquoi.*

Questions de cours.

1) Rappeler le contenu de l'inégalité de Hausdorff-Young pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Rappeler la définition de x^α et de $\alpha!$.

$x^\alpha =$ $\alpha! =$

3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Rappeler la définition du support de f.

Exercice I. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ψ pour qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi' + \varphi = \psi$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice II. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$.
II.1) Montrer que le produit de convolution $f \star f$ a un sens, et le calculer :

$$(f \star f)(x) = \begin{cases} & \text{si} \quad x < 0, \\ & \\ & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

II.2) Donner un exemple de fonction $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pour laquelle le calcul de $g \star g(x)$ conduit à une intégrale divergente.

$$g(x) =$$

Exercice III. On travaille ici sur $\mathbb{R}$ avec des fonctions à valeurs réelles. On rappelle qu'une fonction test est un élément $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv C_c^\infty(\mathbb{R})$.

III.1) Toute fonction test φ peut s'écrire sous la forme $\varphi(x) = \psi(x) + x\zeta(x)$ où ψ et ζ sont des fonctions test paires.

OUI - NON

III.2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et φ une fonction test. Alors $f \star \varphi$ est une fonction test.

OUI - NON

III.3) L'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à φ associe $T(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^x \varphi'(t)\, dt \right)$ est une distribution.

OUI - NON

Exercice IV. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ deux distributions vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \quad \operatorname{supp} \varphi \subset]n, n+2[, \quad T(\varphi) = S(\varphi).$$

Montrer que T et S coïncident.