UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

Corrigé du CC1 du 27/01/2020

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans la cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Questions de cours.

1) Rappeler le contenu de l'inégalité de Hausdorff-Young pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}, \qquad \| f \star g \|_{L^r} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} \ .$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Rappeler la définition de x^α et de $\alpha!$.

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \times \cdots \times x_n^{\alpha_n}$ $\qquad$ $\alpha! = \alpha_1! \times \cdots \times \alpha_n!$

3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Rappeler la définition du support de f.

C'est le complémentaire de l'union des ouverts sur lesquels f est nulle presque partout. Deux erreurs sont à éviter ici :

∘ *Donner comme réponse l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ ce qui marche pour une fonction f continue mais pas pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ (penser à la fonction caractéristique des rationnels qui vaut 0 presque partout et dont le support est $\emptyset$).*

∘ *Oublier la mention du "presque partout" (tester de nouveau avec la fonction caractéristique des rationnels).*

Exercice I. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ψ pour qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi' + \varphi = \psi$.

La relation conduit à :

$$\varphi(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^t \psi(t)\, dt$$

qui est bien une fonction de classe C^∞, nulle pour x suffisamment petit. Par contre, elle s'annulle pour x suffisamment grand si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \psi(t)\, dt = 0.$$

Exercice II. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$.
II.1) Montrer que le produit de convolution $f \star f$ a un sens, et le calculer.

On écrit :

$$(f \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{x-t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x-t) e^t\, dt = e^x \int_0^{\max(0,x)} dt.$$

Le domaine d'intégration étant borné, l'intégrale a un sens et conduit à :

$$(f \star f)(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0, \\ \\ xe^x & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

II.2) Donner un exemple de fonction $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pour laquelle le calcul de $g \star g(x)$ conduit à une intégrale divergente.

Il suffit de prendre $g(x) = 1$ pour tout x car alors :

$$g \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\, dt = +\infty.$$

Exercice III. On travaille ici sur $\mathbb{R}$ avec des fonctions à valeurs réelles. On rappelle qu'une fonction test est un élément $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv C_c^\infty(\mathbb{R})$.

III.1) Toute fonction test φ peut s'écrire sous la forme $\varphi(x) = \psi(x) + x\zeta(x)$ où ψ et ζ sont des fonctions test paires.

OUI

On pose $\psi(x) := (\varphi(x) + \varphi(-x))/2$. C'est une fonction paire qui est de classe C^∞. Ce choix impose (pour $x \neq 0$) la condition :

$$\zeta(x) := \frac{1}{2x}(\varphi(x) - \varphi(-x)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi'(tx) dt$$

qui est paire et de classe C^∞ (par dérivation sous le signe somme).

III.2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et φ une fonction test. Alors $f \star \varphi$ est une fonction test.

NON

Par exemple, pour $f(x) = e^{-x^2}$ et φ positive non nulle, on a :

$$supp\,(f \star \varphi) = \mathbb{R}$$

qui n'est pas compact.

III.3) L'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à φ associe $T(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big(\int_0^x \varphi'(t)\,dt \Big)$ est une distribution.

NON

Le calcul fournit :

$$T(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \ (\varphi(x) - \varphi(0))$$

L'application T n'est pas une forme linéaire. En effet, soient φ et ψ deux fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui sont positives et non nulles, qui valent 0 en 0, et dont les support sont disjoints. On obtient alors :

$$0 < T(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \ \varphi(x), \qquad 0 < T(\psi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \ \psi(x),$$

ainsi que (puisque les supports sont disjoints) :

$$T(\varphi+\psi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \ \big(\varphi(x) + \psi(x)\big) = \max\ \big(T(\varphi); T(\psi)\big) < T(\varphi) + T(\psi).$$

Exercice IV. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ deux distributions vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \quad \operatorname{supp}\varphi \subset]n, n+2[, \quad T(\varphi) = S(\varphi).$$

Montrer que T et S coïncident.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $]-m, m[$ (pour m entier choisi suffisamment grand). On sait qu'il existe une partition de l'unité qui est subordonnée à la collection (finie) d'ouverts $]n, n+2[$ pour $|n| \le m+1$. Plus précisément, on peut trouver des fonctions χ_i vérifiant :

$$\chi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \mathit{supp}\,\chi_i \subset]i, i+2[, \quad \forall\, x \in]-m, m[, \quad \sum_{|i|\le m+1} \chi_i(x) = 1.$$

On écrit alors :

$$T(\varphi) = T\Big(\sum_{|i|\le m+1} \chi_i\varphi \Big) = \sum_{|i|\le m+1} T(\chi_i\varphi) = \sum_{|i|\le m+1} S(\chi_i\varphi) = S(\varphi).$$