UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

CC1 du 28/01/2019 (durée 20mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une indication de preuve. Si c'est* NON, *donner un contre-exemple ou expliquer pourquoi.*

Questions de cours. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

1) Rappeler la définition du *support* de la fonction $\varphi(\cdot)$.

supp φ :=

2) Soit $A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels et $\mathbb{I}_A$ la fonction caractéristique qui lui est associée (qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs). Déterminer le support de cette fonction $\mathbb{I}_A$.

supp $\mathbb{I}_A$:=

3) Soit $\{\chi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ une suite régularisante. Il existe une fonction continue $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la convolée $\mathbb{I}_A * \chi_\varepsilon$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ vers $\tilde{\varphi}$.

OUI - NON

Exercice I. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ une fonction qui vaut 1 au voisinage de 0. On fixe $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Indiquer ci-dessous (selon les différents cas de figure) la valeur de la dérivée :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \Big[\psi(x) x^k\Big]_{|x=0} = \begin{cases} & \text{si} \quad n < k, \\ & \text{si} \quad n = k, \\ & \text{si} \quad n > k. \end{cases}$$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice II. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, on note par $\tau_h f(\cdot)$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Alors :

$$\lim_{h \to 0} \| \tau_h f - f \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

OUI - NON

Exercice III. Soient A et B deux parties mesurables de $\mathbb{R}^d$ dont les mesures de Lebesgue $m(A)$ et $m(B)$ sont finies mais non nulles :

$$0 < m(A) := \int_A dx < +\infty, \qquad 0 < m(B) := \int_B dx < +\infty.$$

III.1) On ne peut pas choisir A (tout comme B) d'intérieur vide (c'est à dire ne contenant aucun ouvert autre que $\emptyset$).

OUI - NON

III.2) Prouver que la fonction $\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B$ est continue.

III.3) Calculer en fonction de $m(A)$ et $m(B)$ la valeur de :

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B)(x) dx =$$

III.4) L'ensemble $A + B := \{a + b\,; a \in A, b \in B\}$ est d'intérieur vide.

OUI - NON