Distribution et ANalyse de Fourier

Corrigé du CC1 du 28/01/2019

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans la cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Questions de cours. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

1) Rappeler la définition du *support* de la fonction $\varphi(\cdot)$.

Voir la définition 1.3.3 du cours (par passage au complémentaire), et pas 1.2.1 qui conduit à une mauvaise définition !

2) Soit $A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels et $\varphi := \mathbb{I}_A$ la fonction caractéristique associée (qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs). Déterminer le support de cette fonction $\varphi(\cdot)$.

supp $\varphi := \mathbb{R}$ *car pour tout ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R}$, *la restriction de* f *à* Ω *ne vaut pas* 0 *presque partout.*

3) Soit $\{\chi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ une suite régularisante. Il existe une fonction continue $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la convolée $\mathbb{I}_A * \chi_\varepsilon$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ vers $\tilde{\varphi}$.

OUI

La fonction $\mathbb{I}_A$ *coïncide presque partout avec la fonction* $\tilde{\varphi} \equiv \mathbb{I}_\mathbb{R}$ *constante égale à* 1. *Les convolées* $\mathbb{I}_A * \chi_\varepsilon$ *convergent dans* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *vers* $\tilde{\varphi} \equiv \mathbb{I}_\mathbb{R}$ *qui est continue.*

Exercice I. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ une fonction qui vaut 1 au voisinage de 0. On fixe $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Indiquer ci-dessous (selon les différents cas de figure) la valeur de la dérivée :

Utiliser la formule de Leibniz :

$$\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \Big[\psi(x)x^k\Big]_{|x=0} = \begin{cases} 0 & si \quad n < k, \\ k! & si \quad n = k, \\ 0 & si \quad n > k. \end{cases}$$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice II. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, on note par $\tau_h f(\cdot)$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Alors :

$$\lim_{h \to 0} \| \tau_h f - f \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

OUI

Vu en TD. C'est l'exercice 1.1 du TD1.

Exercice III. Soient A et B deux parties mesurables de $\mathbb{R}^d$ dont les mesures de Lebesgue $m(A)$ et $m(B)$ sont finies mais non nulles :

$$0 < m(A) := \int_A dx < +\infty, \qquad 0 < m(B) := \int_B dx < +\infty.$$

III.1) On peut choisir A (tout comme B) d'intérieur vide (ne contenant aucun ouvert autre que $\emptyset$).

OUI

Prendre par exemple $A = (\mathbb{R} \setminus \mathcal{Q}) \cap [0,1]$. Les ouverts sont les intervalles ouverts qui contiennent des rationnels, et $m(A) = 1$.

III.2) Prouver que la fonction $\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B$ est continue.

Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $h \in \mathbb{R}^d$. On calcule :

$$\begin{aligned}(\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B)(x+h) - (\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B)(x) &= \int_{\mathbb{R}} [\mathbb{I}_A(y+h) - \mathbb{I}_A(y)] \mathbb{I}_B(x-y) dy \\ &\leq \| \tau_{-h}(\mathbb{I}_A) - \mathbb{I}_A \|_{L^1(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

qui converge vers 0 avec h d'après l'exercice II (avec $p = 1$).

III.3) Calculer en fonction de $m(A)$ et $m(B)$ la valeur de :

On utilise Fubini :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B)(x) dx = \int \Big(\int \mathbb{I}_A(x-y) \mathbb{I}_B(y) dy \Big) dx &= \int \Big(\int \mathbb{I}_A(x-y) dx \Big) \mathbb{I}_B(y) dy \\ &= \int m(A) \mathbb{I}_B(y) dy = m(A) m(B).\end{aligned}$$

III.4) L'ensemble $A + B := \{a + b \,; a \in A, b \in B\}$ est d'intérieur vide.

NON

La fonction $k := \mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B$ est d'intégrale non nulle (d'après III.3), donc non nulle. Elle est continue (d'après III.2). Par conséquent, l'ensemble $k^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert non vide contenu dans le support de k qui est contenu dans le support de $A + B$.