UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Distribution et ANalyse de Fourier**

## CC1 du 17/01/2018 (durée 30mn)

*Les documents ne sont pas autorisés*

**Nom :** **Prénom :**

*Dans la cas d'une réponse par* OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

**Question de cours.** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Rappeler la définition du *support* de la fonction $\varphi(\cdot)$.

$\operatorname{supp} \varphi :=$

1) Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On peut toujours trouver une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\operatorname{supp} \varphi = A$.

OUI - NON

2) On admet qu'il existe une fonction $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\operatorname{supp} \chi = [0, 1]$. Construire à l'aide de $\chi$ une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant :

$$\operatorname{supp} \varphi = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2\,k\,\pi, 2\,k\,\pi + \pi].$$

**T.S.V.P. $\Longrightarrow$**

**Exercice I.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0. On suppose que $f'(x)$ admet une limite finie $\ell$ pour $x \neq 0$ qui tend vers 0. Alors $f(\cdot)$ est dérivable en 0 et $f'(0) = \ell$. Justifier la réponse par une preuve ou un contre-exemple.

OUI - NON

**Exercice II.** Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est dite *plate* en 0 si toutes ses dérivées sont nulles en 0.

II.1) Si $f(\cdot)$ est plate en 0, la série de Taylor de $f(\cdot)$ en 0 est la série nulle.

OUI - NON

II.2) Une fonction $f(\cdot)$ plate en 0 vérifie $f(x) = o(x^n)$ près de 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

OUI - NON

II.3) Une fonction $f(\cdot)$ qui vérifie $f(x) = o(x^n)$ près de 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ est plate en 0.

OUI - NON