CC1 (13 février 2024)

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom : **Prénom :** **Gp de TD :**

Exercice 1. Répondre aux questions suivantes (sans justifier les réponses).

1. Soient f et g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner l'expression de la dérivée de la fonction composée $x \mapsto f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$.

   $(f \circ g)'(x) =$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donner la valeur de la somme

   $$\sum_{i=0}^{n-1} x^i =$$

3. Que dire de deux primitives d'une même fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

4. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Comparer par un signe d'inégalité les deux expressions suivantes :

   $$\int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t \qquad \left| \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \right|$$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions f_i suivantes, donner son intervalle de définition $\mathcal{D}_i$ puis l'expression de la primitive F_i définie sur $\mathcal{D}_i$ vérifiant $F_i(0) = 0$.

⋆ $f_1\colon x \mapsto 4\,(x+1)^2$

$\mathcal{D}_1 =$ $F_1(x) =$

⋆ $f_2\colon x \mapsto x\,e^{x^2}$

$\mathcal{D}_2 =$ $F_2(x) =$

⋆ $f_3\colon x \mapsto \cos(2x) - 1$

$\mathcal{D}_3 =$ $F_3(x) =$

T. S. V. $\Longrightarrow$

Exercice 3.

1. Justifier l'affirmation suivante : pour tout réel x, $e^x \geq 1$ quand x est positif et $e^x \leq 1$ quand x est négatif.

2. Montrer par un calcul d'intégrales que pour tout réel x négatif, $e^x \geq x + 1$.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer deux fonctions f et g telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $f(t) \leq e^{-\frac{1}{t^2}} \leq g(t)$.

   $f(t) =$ $g(t) =$

4. Montrer que le nombre $I = \displaystyle\int_{10}^{100} e^{-\frac{1}{t^2}}\, \mathrm{d}t$ approche 90 à 0,1 près. Justifier.