Correction du CC1

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1.

1. La dérivée est $(f \circ g)' \colon x \mapsto g'(x) \times f'(g(x))$.
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{x^n - 1}{x - 1}$
3. La différence entre deux primitives de f est constante.
4. $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \geq \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|$.

Exercice 2.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \quad F_1(x) &= \frac{4}{3}((x+1)^3 - 1) \\ \mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \quad F_2(x) &= \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1) \\ \mathcal{D}_3 = \mathbb{R} \quad F_3(x) &= \frac{1}{2}\sin(2x) - x \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. L'exponentielle est une fonction croissante et $e^0 = 1$, d'où $e^x \leq 1$ si $x \leq 0$ et $e^x \geq 1$ si $x \geq 0$.
2. Puisque $x \leq 0$, on utilise l'inégalité $e^t \leq 1$ sur $[x, 0]$ et la positivité de l'intégrale pour obtenir
$$\int_x^0 e^t \mathrm{d}t \leq \int_x^0 1\mathrm{d}t$$
Soit $1 - e^x \leq -x$ et donc $1 + x \leq e^x$.
3. Puisque $-\frac{1}{t^2} \leq 0$, poser $f(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$ et $g(t) = 1$ convient.
4. Par positivité de l'intégrale, on a :
$$\int_{10}^{100} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \leq \int_{10}^{100} e^{-\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t \leq \int_{10}^{100} 1\mathrm{d}t$$
Soit :
$$\left[t + \frac{1}{t}\right]_{10}^{100} \leq I \leq [t]_{10}^{100}$$
d'où finalement $89,91 \leq I \leq 90$.