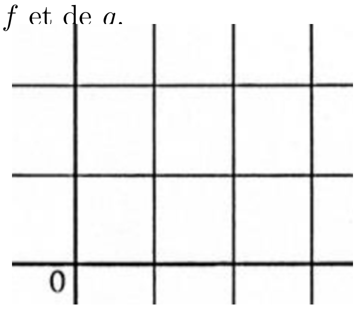
CC1 (04 février 2025)

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom : **Prénom :** **Gp de TD :**

Exercice 1. On considère les fonctions $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x/2$ et $g(x) = -x^2 + 2\,x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les graphes respectifs de f et de g.



1. Donner ci-dessous les valeurs de $f(0)$, $f(2)$, $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$ puis représenter soigneusement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur le quadrillage ci-contre.

   $f(0) = 0$ $\qquad f(2) = 1$

   $g(0) = 1$ $\qquad g(1) = 2$

   $g(2) = 1$

   $\mathcal{C}_g$ est une parabole inversée de sommet $(1,2)$.

   $\mathcal{C}_f$ est une droite qui passe par l'origine et qui est de pente $1/2$. Elle coupe la courbe $\mathcal{C}_g$ au point $(2,1)$.

2. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface délimitée par la droite $x = 0$, le graphe $\mathcal{C}_f$ et la courbe $\mathcal{C}_g$. En regardant le dessin, deviner la valeur de l'entier n qui vérifie $n \le \mathcal{A} \le n+1$.

   $n = 2$

3. On note F et G les primitives respectivement de f et de g vérifiant $F(0) = 0$ et $G(0) = 0$. Déterminer F et G.

   $F(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $\qquad G(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + x$

4. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 f(x)\;dx = \Big[\frac{x^2}{4}\Big]_0^2 = 1 - 0 = 1 \text{ (aire d'un triangle)}$$

$$\int_0^2 g(x)\;dx = \Big[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x\Big]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 + 2 - 0 = \frac{10}{3}$$

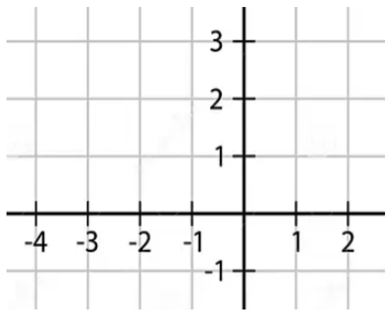
5. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$. *On obtient* $\mathcal{A} = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3} \in [2,3]$ *comme intuité en 2.*

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \le -1\,, \\ 1 \text{ si } \ -1 < t\,. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

$$F(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \le -1\,, \\ +x \text{ si } \ -1 < x\,. \end{cases}$$



T. S. V. $\Longrightarrow$

Exercice 3. Soient $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = e^x$ et $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$.

1. Quelle propriété de la fonction h implique le résultat suivant : pour tout x situé dans l'intervalle $[k/n, (k+1)/n]$, on a l'encadrement $e^{k/n} \leq e^x \leq e^{(k+1)/n}$.

   La fonction h est croissante

2. Donner les deux raisons qui font que $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(x)\,dx$.

   Raison 1 : L'intervalle $[0,1]$ est l'union disjointe des intervalles $]k/n, (k+1)/n[$ pour un entier k variant entre 0 et $n-1$.

   Raison 2 : La relation de Chasles $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^c h(x)\,dx + \int_c^b h(x)\,dx$ répétée n fois avec $a = k/n$ et $b = (k+1)/n$.

3. On pose $U_n := \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$. Prouver l'encadrement $U_n \leq \displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx \leq e^{1/n}\, U_n$.

   On part de l'encadrement donné en 1. Comme l'intégration préserve les inégalités, pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, on a :

   $$\frac{1}{n}\, e^{k/n} = \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{k/n}\,dx \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^x\,dx \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{(k+1)/n}\,dx = \frac{1}{n}\, e^{(k+1)/n}$$

   On somme de $k=0$ à $n-1$ ce qui donne en utilisant la question 2. l'encadrement suivant :

   $$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n} \leq \int_0^1 e^x\,dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{(k+1)/n} = e^{1/n}\, U_n$$

4. On remarque que $\alpha^k = e^{k/n}$ avec $\alpha = e^{1/n} \neq 1$. On rappelle l'identité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$. Donner ci-dessous (sans justification) la valeur de U_n.

   $$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{1/n})^k = \frac{1}{n}\, \frac{(e^{1/n})^n - 1}{e^{1/n} - 1} = (e-1)\, \frac{1/n}{e^{1/n} - 1}$$

5. On rappelle que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Expliquer pourquoi la suite $(U_n)_n$ converge vers une limite finie ℓ (à expliciter) lorsque n tend vers $+\infty$.

   Avec $h = 1/n$ qui tend vers 0 pour $n \to +\infty$, on récupère $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n = e - 1$.

6. Montrer qu'on peut retrouver la valeur de ℓ par le calcul d'une intégrale.

   Comme $e^{1/n}$ converge vers $e^0 = 1$ lorsque n tend vers $+\infty$, après passage à la limite, l'encadrement de la question 3 conduit à

   $$\ell = \int_0^1 h(x)\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1\,,$$

   ce qui est cohérent avec la valeur de ℓ obtenue précédemment.