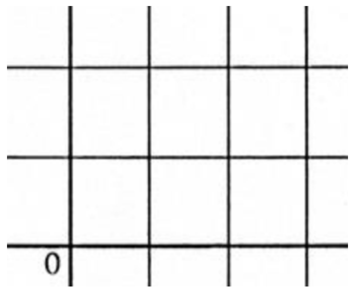
CC1 (04 février 2025)

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom : **Prénom :** **Gp de TD :**

Exercice 1. On considère les fonctions $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x/2$ et $g(x) = -x^2 + 2\,x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les graphes respectifs de f et de g.

1. Donner ci-dessous les valeurs de $f(0)$, $f(2)$, $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$ puis représenter soigneusement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur le quadrillage ci-contre.



   $f(0) =$ $f(2) =$

   $g(0) =$ $g(1) =$

   $g(2) =$

2. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface délimitée par la droite $x = 0$, le graphe $\mathcal{C}_f$ et la courbe $\mathcal{C}_g$. En regardant le dessin, deviner la valeur de l'entier n qui vérifie $n \leq \mathcal{A} \leq n + 1$.

   $n =$

3. On note F et G les primitives respectivement de f et de g vérifiant $F(0) = 0$ et $G(0) = 0$. Déterminer F et G.

   $F(x) =$ $G(x) =$

4. Calculer les intégrales suivantes :

   $$\int_0^2 f(x)\ dx =$$

   $$\int_0^2 g(x)\ dx =$$

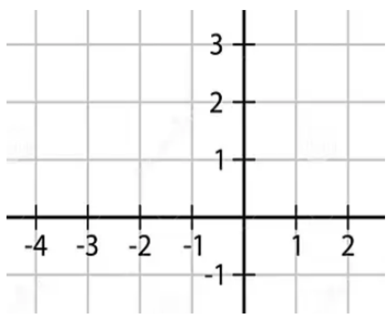
5. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$. On obtient $\mathcal{A} =$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq -1\,, \\ 1 \text{ si } \ -1 < t\,. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Tracer ci-contre le graphe de F.



T. S. V. $\Longrightarrow$

Exercice 3. Soient $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = e^x$ et $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$.

1. Quelle propriété de la fonction h implique le résultat suivant : pour tout x situé dans l'intervalle $[k/n,(k+1)/n]$, on a l'encadrement $e^{k/n} \leq e^x \leq e^{(k+1)/n}$.

   La fonction h est

2. Donner les deux raisons qui font que $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(x)\,dx$.

3. On pose $\displaystyle U_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$. Prouver l'encadrement $\displaystyle U_n \leq \int_0^1 h(x)\,dx \leq e^{1/n}\, U_n$.

4. On remarque que $\alpha^k = e^{k/n}$ avec $\alpha = e^{1/n} \neq 1$. On rappelle l'identité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$. Donner ci-dessous (sans justification) la valeur de U_n.

   $U_n =$

5. On rappelle que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Expliquer pourquoi la suite $(U_n)_n$ converge vers une limite finie ℓ (à expliciter) lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Montrer qu'on peut retrouver la valeur de ℓ par le calcul d'une intégrale.