UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse appliquée

Corrigé du CC1 posé Le 14/02/2025

Questions de cours.

Q1. Décrire l'ensemble des solutions $y(t)$ de l'équation linéaire homogène $y'(t) = a(t)\, y(t)$ où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

$$y(t) = y_0 \; e^{\int_0^t a(s)\, ds}\,, \qquad y_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Q2. La solution $y(t)$ obtenue ci-dessus est pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$ stable par rapport à la donnée initiale (entourer la bonne réponse ou rayer la mauvaise).

OUI *car si on perturbe y_0 en $y_0 + \varepsilon$, on obtient une solution $y_\varepsilon(t)$ qui vérifie*

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = \varepsilon \; e^{\int_0^t a(s)\, ds}$$

et qui donc converge vers 0 lorsque le paramètre ε tend vers 0.

Q3. On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On considère deux fonctions $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $d : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$c(a) = d(a)\,, \qquad c(b) = d(b)\,, \qquad c(x) < d(x)\,, \quad \forall x \in]a, b[\,.$$

On note Ω le domaine défini par :

$$\Omega := \{\, (x, y)\,;\, x \in [a, b]\,,\, c(x) \le y \le d(x) \,\}\,.$$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que dit le *théorème de Fubini* pour ce qui est de l'intégrale double :

$$\int\!\!\int_\Omega f(x, y)\; dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\; dy \Big)\; dx\,.$$

Exercice 1. Une masse m est posée au repos à l'instant $t = 0$ sur un support. Puis elle est mise en mouvement selon un dispositif qui prescrit sa vitesse $v(t)$ à l'instant t via :

$$m\, v'(t) = \cos t - k\, v(t)\,, \qquad (m, k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

Déterminer la vitesse $v(t)$.

1.1. Quelle est léquation homogène associée, et l'ensemble de ses solutions $w(t)$.

L'équation homogène s'écrit $m\,w'(t) = -k\,w(t)$. L'ensemble de ses solutions sont décrites par $w(t) = C\,e^{-k\,t/m}$ avec $C \in \mathcal{R}$.

1.2. Utiliser (au brouillon - on ne demande pas le détail des calculs) la méthode de la variation des constantes pour déterminer la vitesse $v(t)$ sous la forme d'une intégrale.

La méthode de la variation des constantes consiste à regarder C comme une fonction $C(t)$ puis à trouver une EDO sur $C(t)$. Ici, on obtient $m\,C'(t)\,e^{-k\,t/m} = \cos t$ ce qui conduit à

$$v(t) = \frac{1}{m}\int_0^t \cos s\ e^{k\,(s-t)/m}\,ds\,.$$

Exercice 2. Des savants observent la population de lapins sur une île. Partant à l'instant $t = 0$ d'une population de $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ individus, ils ont remarqué que son évolution satisfaisait à l'équation dite *logisitique* suivante :

$$x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)^2\,, \qquad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

2.1. Expliquer pourquoi il y a existence et unicité locale en temps, sur un intervalle de temps $[0, T_m[$ où $T_m \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ désigne le temps de vie maximal, pour le problème de Cauchy décrit ci-dessus.

Il s'agit d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, et donc d'en vérifier les hypothèses. L'EDO est autonome, de la forme $x' = f(x)$, avec $f(x) = a\,x - b\,x^2$. La fonction f est de classe C^1, à dérivées bornées sur tout compact, donc localement Lipschitzienne.

2.2. Prouver que $0 < x(t)$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

L'expression $\tilde{x}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est solution particulière. Or deux trajectoires ne peuvent pas se croiser (cours). Cela implique $0 = \tilde{x}(t) < x(t)$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

2.3. Calculer la dérivée de $e^{-a\,t}\,x(t)$ pour montrer que $x(t) \le x_0\,e^{a\,t}$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

On obtient

$$\frac{d}{dt}(e^{-a\,t}\,x(t)) = -a\,e^{-a\,t}\,x(t) + e^{-a\,t}\,x'(t) = -b\,e^{-a\,t}\,x(t)^2 \le 0\,.$$

Il s'ensuit que $e^{-a\,t}\,x(t) \le x_0$ ce qui conduit au résultat.

2.4. En déduire que $T_m = +\infty$.

On raisonne par l'absurde. Supposons que le temps maximal d'existence T_m soit fini. Alors, l'encadrement

$$0 \le x(t) \le x_0\,e^{a\,t}\,, \qquad \forall t \in [0, T_m[\,,$$

est en contradiction avec le critère d'explosion qui stipule que la solution $x(t)$ ne peut pas rester bornée au voisinage de T_m (elle doit "exploser").

2.5. Déterminer toutes les solutions stationnaires (représentant des équilibres) sachant qu'on part avec $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

Par définition, une solution stationnaire est constante. Sa dérivée est nulle, ce qui implique $x\,(a - b\,x) = 0$, ou encore $x = x_0 = a/b$ puisque l'autre solution $x = x_0 = 0 \notin \mathbb{R}_+^*$ est exclue par hypothèse.

2.6. On suppose $x_0 \neq a/b$, et on introduit $\tilde{x}_0 := x_0/(a - b\,x_0)$. Résoudre l'équation logistique en l'interprétant comme une équation à variables séparées. *Penser à simplifier la fraction obtenue en x ; ne pas détailler les calculs (qui sont à effectuer au brouillon) ; et exprimer le résultat final à l'aide de $\tilde{x}_0$.*

Interpréter l'équation logistique en variables séparées signifie l'écrire sous la forme :

$$\frac{a\,dx}{x\,(a - b\,x)} = \frac{dx}{x} + \frac{b\,dx}{a - b\,x} = a\,dt\,.$$

Après intégration de 0 à t, cela fournit

$$\ln\,x(t) - \ln\,x_0 - \ln\,(a - b\,x(t)) + \ln\,(a - b\,x_0) = a\,t\,.$$

Ou encore

$$\frac{x(t)}{a - b\,x(t)} = \tilde{x}_0\; e^{a\,t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(t) = \frac{a\,\tilde{x}_0\,e^{a\,t}}{1 + b\,\tilde{x}_0\,e^{a\,t}}\,.$$

2.7. Montrer que la solution $x(t)$ converge vers une limite finie ℓ lorsque t tend vers $+\infty$. Exprimer ℓ en fonction de a et de b. Interprétation ?

Il est clair sur la formule que $x(t)$ converge vers la solution stationnaire $\ell = a/b$ lorsque t tend vers $+\infty$. On peut même évaluer la différence

$$\left|x(t) - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b\;(1 + b\,\tilde{x}_0\,e^{a\,t})}\right| \leq \left|\frac{a}{b\;(1 + b\,\tilde{x}_0)}\right| = \left|\frac{a}{b} - x_0\right|\,.$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x_0 - a/b| \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; \sup_{t \geq 0}\,|x(t) - a/b| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui signifie que le point d'équilibre ℓ est stable.

Exercice 3. Soit Δ le triangle de sommets $(0, -1)$, $(2, 1)$ et $(0, 1)$.

3.1. Compléter la définition suivante :

$$\Delta = \{\,(x, y)\,;\, -1 \leq y \leq 1\,,\, 0 \leq x \leq y + 1\,\}\,.$$

3.2. Calculer :

$$\int\!\!\int_\Delta y\;dx\,dy = \int_{-1}^{1} y\,\left(\int_0^{1+y} dx\right)\,dy = \int_{-1}^{1} (y + y^2)\;dy = \frac{2}{3}\,.$$