UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse appliquée

CC1 - Le 14/02/2025 - 1h

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Questions de cours.

Q1. Décrire l'ensemble des solutions $y(t)$ de l'équation linéaire homogène $y'(t) = a(t)\, y(t)$ où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

$y(t) =$

Q2. La solution $y(t)$ obtenue ci-dessus est pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$ stable par rapport à la donnée initiale (entourer la bonne réponse ou rayer la mauvaise).

OUI **NON**

Q3. On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On considère deux fonctions $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $d : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$c(a) = d(a)\,, \qquad c(b) = d(b)\,, \qquad c(x) < d(x)\,, \quad \forall x \in]a, b[\,.$$

On note Ω le domaine défini par :

$$\Omega := \{\, (x, y)\,;\, x \in [a, b]\,,\, c(x) \leq y \leq d(x)\,\}\,.$$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que dit le *théorème de Fubini* pour ce qui est de l'intégrale double :

$$\int\!\!\int_\Omega f(x, y)\; dx\, dy =$$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 1. Une masse m est posée au repos à l'instant $t = 0$ sur un support. Puis elle est mise en mouvement selon un dispositif qui prescrit sa vitesse $v(t)$ à l'instant t via :

$$m\, v'(t) = \cos t - k\, v(t)\,, \qquad (m, k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

1.1. Quelle est l'équation homogène associée, et l'ensemble de ses solutions $w(t)$.

1.2. Utiliser (au brouillon - on ne demande pas le détail des calculs) la méthode de la variation des constantes pour déterminer la vitesse $v(t)$ sous la forme d'une intégrale sachant qu'*au repos à l'instant* $t = 0$ signifie $v(0) = 0$.

$$v(t) = \qquad \int_0^t$$

Exercice 2. Des savants observent la population de lapins sur une île. Partant à l'instant $t = 0$ d'une population de $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ individus, ils ont remarqué que son évolution satisfaisait à l'équation dite *logisitique* suivante :

$$x'(t) = a\, x(t) - b\, x(t)^2\,, \qquad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

2.1. Expliquer pourquoi il y a existence et unicité locale en temps, sur un intervalle de temps $[0, T_m[$ où $T_m \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ désigne le temps de vie maximal, pour le problème de Cauchy décrit ci-dessus.

2.2. Prouver que $0 < x(t)$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

2.3. Calculer la dérivée de $e^{-a\,t}\,x(t)$ pour montrer que $x(t) \leq x_0\,e^{a\,t}$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

2.4. En déduire que $T_m = +\infty$.

2.5. Déterminer toutes les solutions stationnaires (représentant des équilibres) sachant qu'on part avec $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

2.6. On suppose $x_0 \neq a/b$, et on introduit $\tilde{x}_0 := x_0/(a - b\,x_0)$. Résoudre l'équation logistique en l'interprétant comme une équation à variables séparées. *Penser à simplifier la fraction obtenue en x ; ne pas détailler les calculs (qui sont à effectuer au brouillon) ; et exprimer le résultat final à l'aide de $\tilde{x}_0$.*

2.7. Montrer que la solution $x(t)$ converge vers une limite finie ℓ lorsque t tend vers $+\infty$. Exprimer ℓ en fonction de a et de b. Interprétation ?

Exercice 3. Soit Δ le triangle de sommets $(0, -1)$, $(2, 1)$ et $(0, 1)$.

3.1. Compléter la définition suivante :

$$\Delta = \{\, (x, y)\,;\, -1 \leq y \leq 1\,,\, 0 \leq x \leq \qquad \}\,.$$

3.2. Calculer :

$$\iint_\Delta y \; dx\, dy =$$