UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse appliquée

CC1 - Le 09/02/2024 - 1h

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Questions de cours.

Q1. Que signifie la phrase "$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est Lipschitzienne*" ?

Q2. Ennoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 1. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Résoudre (au sens de décrire toutes les solutions) les EDOs suivantes (donner les résultats sans justification).

1.1. $y'' + y - 2 = 0$. $\qquad y(t) =$

1.2. $y'' + 16 = 0$. $\qquad y(t) =$

Exercice 2. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants (donner les résultats sans justification).

2.1. $y' = 2\,y$ avec $y(0) = 3$. $\qquad y(t) =$

2.2. $y'' + y - 2 = 0$ avec $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$. $\qquad y(t) =$

Exercice 3. Un modèle atmosphérique classique conduit à l'équation différentielle suivante pour décrire l'évolution de l'irradiation solaire sur la surface terrestre en fonction du temps (mesuré en années) :

$$x'(t) = r\,x(t)^2\,, \qquad x(0) = x_0\,,$$

où $r > 0$ est une constante et $x_0 > 0$ est une donnée initiale.

3.1. Décrire la forme générale des solutions :

$x(t) =$

3.2. Déterminer les valeurs de r et x_0 sachant que la théorie donne l'expression suivante pour l'évolution de l'irradiation solaire $x(t) = 342/(1 - 10^{-10}\,t)$.

$x_0 =$ $\qquad\qquad$ $r =$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 4. On se donne une fonction de classe C^1 notée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle ordinaire $(1+t^2)\,y' - 2\,y = g(t)$.

4.1. On suppose ici que $g(t) = (t-1)^2$. Donner ici les résultats sans justification.

4.1.1. Trouver une solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme d'un polynôme de degré 1.

$\tilde{y}(t) =$

4.1.2. Calculer la dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = e^{2\mathrm{Arctan}(t)}$.

$f'(t) =$

4.1.3. Décrire la forme générale des solutions :

$y(t) =$

4.2. On suppose ici que $g(t) = 1$. En utilisant la méthode de la variation de la constante, donner la forme générale des solutions. On demande d'écrire le résultat ci-dessous puis d'expliquer comment il a été obtenu.

$y(t) =$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 5. L'évolution dans le temps d'une population constituée de deux espèces, des lapins en quantité x et des renards en quantité y, peut être modélisée par le système :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(\mu - y(t))\,, \\ y'(t) = y(t)\,(x(t) - \kappa)\,, \end{cases}$$

où μ et κ sont deux constantes strictement positives.

5.1. Déterminer les deux points d'équilibre.

$(x_1^*, y_1^*) = (0, \qquad)$ $\qquad\qquad$ $(x_2^*, y_2^*) = (\qquad , \qquad)$

5.2. On se place près du point d'équilibre (x_1^*, y_1^*). Cela revient à chercher une solution sous la forme $(x, y) = (\varepsilon u_\varepsilon, \varepsilon v_\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$. Ecrire ci-dessous à gauche le système vérifié par $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ et à droite le système sur $(\tilde{u}, \tilde{v})$ obtenu en négligeant dans ce système les termes perturbatifs en $O(\varepsilon)$.

$$\begin{cases} u_\varepsilon'(t) = \\ \\ v_\varepsilon'(t) = \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \tilde{u}'(t) = \\ \\ \tilde{v}'(t) = \end{cases}$$

5.3. On part à l'instant initial $t = 0$ avec $(x, y)(0) = (\varepsilon\tilde{u}_0, \varepsilon\tilde{v}_0)$ où $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Faire un dessin représentant l'évolution (approximative) des deux espèces au voisinage du point d'équilibre (x_1^*, y_1^*). On demande en particulier de déterminer et de rendre visible l'espèce (lapins ou renards ?) qui aura tendance à prédominer.

FIN DE L'EPREUVE.