UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse appliquée

CC1 - Le 09/02/2024 - 1h

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Questions de cours.

Q1. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Résoudre et justifier la résolution de : $y' + a(x)y = 0$.

Q2. On considère l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ avec $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Expliciter en la justifiant la forme des solutions particulières obtenues par la méthode de variation de la constante.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 1. *Un modèle atmosphérique classique conduit à l'équation différentielle suivante pour décrire l'évolution de l'irradiation solaire sur la surface terrestre en fonction du temps :*

$$x'(t) = rx(t)^2$$

où $r > 0$ est une constante dépendant de caractéristiques intrinsèques.

1.1. *Décrire la forme générale des solutions :*

Si $x \neq 0$:

$$\frac{x'}{x^2} = \left(' - \frac{1}{x}\right)' = r \iff \frac{1}{x} = -rt + C \iff x(t) = \frac{1}{C - rt}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{C}{r}\}$$

donc la solution générale s'écrit :

$$x(t) = \frac{1}{C - rt}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{C}{r}\right\}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.2. *Déterminer r sachant que la théorie donne l'expression suivante de l'irradiation solaire sur la surface terrestre en fonction du temps t mesuré en années :*

$$Q(t) = \frac{342}{1 - 10^{-10}t}.$$

Soit $C \in \mathbb{R}^*$ On réécrit la solution sous la forme :

$$x(t) = \frac{C^{-1}}{1 - \dfrac{rt}{C}}$$

d'où on déduit : $C = \dfrac{1}{342}$ et

$$\frac{r}{C} = 10^{-10} \iff r = \frac{10^{-10}}{342}$$

1.3. *Que prédit ce modèle quant à la destinée à long terme de la Terre ?*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

conformément à la théorie qui prédit l'extinction du soleil.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 2. *On se donne une fonction de classe C^1 notée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle ordinaire $(1+t^2)y' - 2y = g(t)$.*

2.1. *On suppose ici que $g(t) = (t-1)^2$.*

2.1.1. *Trouver une solution particulière u sous la forme d'un polynôme.*

On cherche une solution particulière sous la forme : $u(t) = at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(1+t^2)a - 2(at+b) = at^2 - 2at + a - b = t^2 - 2t + 1.$$

Par identification, on obtient :

$$a = 1, \quad b = 0,$$

i.e. :

$$u(t) = t.$$

2.1.2. *Décrire la forme générale des solutions :*

L'équation est linéaire en y et y', et s'écrit, sous forme résolue :

$$y' - \frac{2}{(1+t^2)} y = \frac{(t-1)^2}{1+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'équation homogène associée s'écrit :

$$z' - \frac{2t}{(1+t^2)} z = 0.$$

Si $z(t) \neq 0$

$$\frac{z'}{z} = (\ln|z|)' = \frac{2}{1+t^2} \iff \ln|z| = \int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\mathrm{Arctan}(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On en déduit :

$$z(t) = Ke^{2\mathrm{Arctan}(t)}, \quad K \in \mathbb{R}^*$$

et on vérifie immédiatelent que

$$\left(ze^{-2\mathrm{Arctan}(t)}\right)' = 0$$

donc la solution générale de l'quation homogène s'écrit :

$$z(t) = Ke^{2\mathrm{Arctan}(t)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

En conclusion :

$$y(t) = t + Ke^{2\mathrm{Arctan}(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2.2. *On suppose ici que $g(t) = 1$.*

2.2.1. *Calculer la dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = e^{-2\mathrm{Arctan}(t)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$;*

$$f'(t) = -\frac{2}{(1+t^2)} e^{-2\mathrm{Arctan}(t)}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.2.2. *En utilisant par exemple la méthode de la variation de la constante, décrire la forme générale des solutions :*

Sous forme résolue :

$$y' - \frac{2y}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On cherche y sous la forme :

$$y(t) = K(t)e^{2\text{Arctan}(t)}$$

et alors :

$$K'(t)e^{2\text{Arctan}(t)} = \frac{1}{(1+t^2)}$$

i.e. :

$$K(t) = \int \frac{e^{-2\text{Arctan}(t)}}{(1+t^2)}dt \underset{(2.2.1.)}{=} -\frac{1}{2}e^{-2\text{Arctan}(t)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Il en rśulte :

$$y(t) = -\frac{1}{2} + K_0 e^{2\text{Arctan}(t)}, \quad K_0 \in \mathbb{R}.$$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 3. *L'évolution dans le temps d'une population constituée de deux espèces en quantités x et y respectivement est classiquement modélisée par le système :*

$$x'(t) = x(t)(\mu - y(t)), \quad y'(t) = y(t)(x(t) - \kappa)$$

où μ et κ sont deux consntantes > 0.

3.1. *Déterminer les points d'équilibre (en nombre ≥ 1) :*

$$x' = y' = 0 \iff \begin{cases} x(t)(\mu - y(t)) & = & 0, \\ y(t)(x(t) - \kappa) & = & 0 \end{cases} \iff x(t) = y(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y(t) & = & \mu, \\ x(t) & = & \kappa \end{cases}$$

donc il y a deux points d'équilibre : $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ et $(x_2^*, y_2^*) = (\kappa, \mu)$

3.2. *On pose : $x = \varepsilon u$, $y = \varepsilon v$ avec $\varepsilon > 0$ supposé très petit. Ecrire le système vérifié par (u, v) quand $\varepsilon \to 0$.*

Après report et simplification on obtient :

$$\begin{cases} u' & = & u(\mu - \varepsilon v), \\ v' & = & v(\varepsilon u - \kappa). \end{cases}$$

i.e., quand $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} u'(t) & = & \mu u \\ v'(t) & = & -\kappa v. \end{cases}$$

3.3. *En déduire qu'il existe un équilibre (x^*, y^*) préservant au moins l'une des deux espèces. Que devient l'autre espèce ?*

Des solutions :

$$u = u_0 e^{\mu t}, \quad v = v_0 e^{-\kappa t}, \quad t > 0$$

on déduit que

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) \underset{u_0 > 0}{=} +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} v(t) = 0$$

donc l'équilibre $(x^*, y^*) = (0, 0)$ est instable. Il conduit à l'extinction de la population y au profit de la population x qui explose.

FIN DE L'EPREUVE.