UNIVERSITÉ RENNES 2

Algèbre IV pour MIASHS - TD2

Année 2019-2020

Une **norme** est une extension de la valeur absolue des nombres aux vecteurs. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition. *On appelle* **norme** *sur E une application*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \| x \| \end{array}$$

vérifiant les trois axiomes suivants :
N1 *(*séparation*) :* $\forall x \in E, \quad \| x \| = 0 \iff x = 0.$
N2 *(*homogénéité positive*) :* $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad \| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|.$
N3 *(*inégalité triangulaire*) :* $\forall (x, y) \in E \times E, \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$ ◦

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme est appellé un *espace vectoriel normé* (e.v.n.).

Une **distance** est une application qui formalise l'idée intuitive d'une longueur qui sépare deux points. Plus précisément :

Définition. *On appelle* **distance** *sur un ensemble E (non vide) une application*

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

vérifiant les trois axiomes suivants :
D1 *(*séparation*) :* $\forall (x, y) \in E \times E, \quad x = y \iff d(x, y) = 0.$
D2 *(*symétrie*) :* $\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = d(y, x).$
D3 *(*inégalité triangulaire*) :* $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$ ◦

Un ensemble muni d'une distance est appellé un *espace métrique* (e.m.).

Sur un e.v.n. E, on peut considérer l'application $(x, y) \longmapsto d(x, y) := \| y - x \|$. Cela définit une distance appellée *distance induite par la norme.*

Exercice 1. Soit n un entier non nul. Etant donné $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\| x \|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \| x \|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big)^{1/2}, \qquad \| x \|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1.1. Montrer que $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

1.2. On s'intéresse ici aux propriétés de $\| x \|_2$.

1.2.a. On considère le polynôme $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par $P(t) := \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2$. Quelle condition sur le discriminant de P traduit le fait que la fonction $P(\cdot)$ est à valeurs positives ? En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \| x \|_2 \| y \|_2 \ .$$

1.2.b. Pouver que $\| \cdot \|_2$ vérifie N3.

1.2.c. Pouver que $\| \cdot \|_2$ vérifie N1 et N2. Conclusion ?

1.3. Etablir les inégalités suivantes (valables pour tout $x \in \mathbb{R}^n$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \| x \|_\infty \leq \| x \|_1 \leq n \| x \|_\infty, \\ \| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \sqrt{n} \| x \|_\infty, \\ \| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq \sqrt{n} \| x \|_2 \ . \end{array} \right.$$

En déduire que les trois normes étudiées sont équivalentes au sens où :

$$\forall (\star, \sharp) \in \{1, 2, \infty\}, \quad \exists C \in \mathbb{R}_+^*; \quad C^{-1} \| x \|_\star \leq \| x \|_\sharp \leq C \| x \|_\star \ .$$

1.4. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées à l'origine et de rayon 1 pour chacune des trois normes envisagées ci-dessus.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) := \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x = y, \\ 1 & \text{si} & x \neq y. \end{array} \right.$$

2.2. Montrer que $d(\cdot, \cdot)$ définit une distance.

2.2. Montrer que cette distance n'est pas induite par une norme.

Exercice 3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pour que l'application :

$$\begin{array}{rcl} N : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |ax_1 + bx_2| + |cx_1 + dx_2| \end{array}$$

définisse une norme sur $\mathbb{R}^2$.