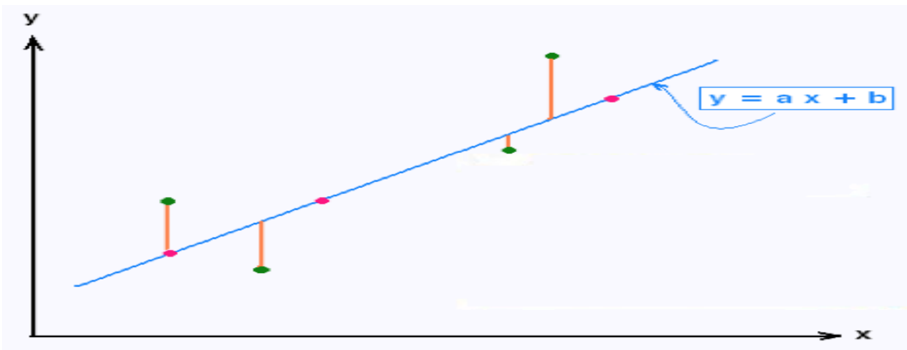
**Algèbre IV pour MIASHS - TD1**

Année 2019-2020

---

L'objet de la **méthode des moindres carrés** est de fournir un outil d'interprétation de données. Plus précisément, lorsqu'on dispose de données dépendant de deux paramètres $x$ et $y$, on peut les représenter comme ci-dessous dans le plan muni d'un repère, en marquant $x$ en abscisse et $y$ en ordonnée. Si le *nuage de points* obtenu a l'allure d'une droite, on aimerait savoir quelle *loi* relie les deux paramètres $x$ et $y$ de la mesure, c'est à dire quelle est la "meilleure" équation $y = ax + b$ pour cette droite, ou encore quels sont les choix "optimaux" pour $a$ et $b$. C'est ce que vise la méthode des moindres carrés.




En 1801, l'astronome italien **G. Piazi** découvre l'astéroïde *Cérès*. Plusieurs scientifiques tentent alors de prédire sa trajectoire sur la base des observations de Piazzi. En 1809, alors agé de 24 ans, **Carl Friedrich Gauss** propose d'utiliser pour cela une nouvelle méthode qui est celle des moindres carrés. Il la publie parmi ses travaux sur la mécanique céleste, intitulés *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.*

**Exercice 1.** Un axiome de la géométrie Euclidienne stipule que par deux points distincts du plan, il passe une droite et une seule.

1) Trouver l'équation cartésienne (du type $y = ax + b$) de la droite passant par les deux points de coordonnées $(-1, 4)$ et $(2, -2)$. Toutes les droites du plan ont-elles une équation de ce type ?

2) Expliquer pourquoi $a$ s'interprète comme une pente et pourquoi $b$ est l'ordonnée à l'origine. Tracer cette droite dans le plan muni d'un repère.

Dès qu'on se donne trois points, il n'y a plus forcément une droite qui les relie. On cherche alors la droite passant au plus près des points donnés, en un sens qu'il faut préciser. Pour cela, on a besoin de calculer la "distance verticale" d'un point à cette droite. L'objectif de l'exercice qui suit est d'expliquer comment cela se fait.

**Exercice 2.** Dans le plan, on considère la droite $D$ d'équation $y = ax + b$ et le point $M$ de coordonnées $(x_0, y_0)$.

1) Quelle est l'ordonnée du point de $D$ d'abscisse $x_0$ ?
2) En déduire que la distance verticale de $M$ à $D$, c'est-à-dire la longueur du segment vertical qui relie $M$ à $D$, est $d(M; D) = |y_0 - ax_0 - b|$.
3) En déduire la distance verticale des points de coordonnées $(-1, 1)$, $(0, 4)$ et $(1, -1)$ à la droite de l'exercice 1. Calculer la somme des carrés de ces distances.
4) Faire de même avec la droite d'équation $y = -x + (4/3)$. Laquelle de ces deux droites passe-t-elle "le plus près" (en un sens à préciser) des trois points ?

Dans la méthode des moindres carrés, on cherche la droite (représentée par son équation $y = ax + b$) qui minimise la somme des carrés des distances verticales des points à la droite. Donnons-nous $n$ points de coordonnées respectives $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $\cdots$, $(x_n, y_n)$. La distance du i-ème point à la droite d'équation $y = ax + b$ est $|y_i - ax_i - b|$. Donc, la somme des carrés des distances est :

$$S \equiv S(a, b) = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2.$$

Les $x_i$ et les $y_i$ sont des données. On cherche les valeurs de $a$ et $b$ minimisant $S(\cdot)$. On voit donc $S(a, b)$ comme une fonction des deux inconnues que sont $a$ et $b$, et on cherche le(s) couple(s) $(a_0, b_0)$ en le(s)quel(s) $S(\cdot)$ prend une valeur minimale (si celle-ci existe).

**Exercice 3.**

1) Montrer que $S(a, b)$ peut s'écrire sous la forme :
$$S(a, b) = \alpha a^2 + 2\beta ab + nb^2 + 2\gamma a + 2\delta b + \zeta,$$
où les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ et $\zeta$ sont à déterminer en fonction des $x_i$ et des $y_i$.
2) On suppose $\alpha \neq 0$ (sinon ?). Montrer que $n - \alpha^{-1}\beta^2 \geq 0$. Soit $c_n := (n - \alpha^{-1}\beta^2)^{1/2}$.
3) Commenter à part le cas $c_n = 0$. On suppose $c_n \neq 0$. Montrer que $S(a, b)$ peut s'écrire sous la forme suivante (où $\tilde{\zeta}$ ne dépend ni de $a$ ni de $b$) :
$$S(a, b) = \alpha(a + \alpha^{-1}\beta b + \alpha^{-1}\gamma)^2 + (c_n b - c_n^{-1}\alpha^{-2}\beta\gamma + c_n^{-1}\delta)^2 + \tilde{\zeta}.$$
4) Déterminer un système de deux équations (impliquant $a$ et $b$) permettant de minimiser la fonction $S(\cdot)$. Quelle est la valeur du minimum de la fonction $S(\cdot)$ ?
5) En déduire les valeurs de $a_0$ et de $b_0$ puis commenter les résultats affichés ci-dessous.