UNIVERSITÉ DE RENNES 1

AN3 : Fonctions de la variable réelle

Feuille de TD n°6

Courbes paramétrées

Révisions

1) Qu'est-ce qu'une courbe plane paramétrée ? Donner des exemples de paramétrisation d'une droite, d'un cercle. Interpréter cinématiquement.

2) Qu'est-ce qu'un point multiple ? Cette notion est-elle liée au support ou à la paramétrisation ?

3) Comment définir la notion de tangente ? Qu'est-ce qu'un point stationnaire ? Comment étudier la courbe au voisinage d'un tel point ? Préciser les différent types de points singuliers.

4) Comment définir et étudier les branches infinies d'une courbe paramétrée ?

5) Préciser le plan d'étude d'une courbe plane paramétrée. Comment étudier la concavité d'une telle courbe ?

Exercice n°1 *(R : Ex 4)*

Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de l'arc $z = \frac{1}{3}(2e^{it} + e^{-2it})$. En calculant $z(t + \dfrac{2\pi}{3})$, trouver une transformation géométrique simple laissant la courbe globalement invariante.

Exercice n°2 *(R : Ex 5)*

Trouver les points multiples de l'arc $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$

Exercice n°3

Construire la courbe d'équations paramétriques : $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$.

Déterminer les coordonnées du point double et vérifier que les tangentes en ce point sont orthogonales.

Exercice n°4

Construire la courbe d'équations paramétriques : $x = (1 + \cos t)\sin 2t, \quad y = \cos 2t$. Étudier les points stationnaires.

Exercice n°5 *(G : Exemp 6.7)*

Étudier les branches infinies de la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t}{t-1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}.$

Exercice n°6

Construire la courbe d'équations paramétriques : $x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1}, \quad y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{(t+1)^2}$. Étudier les points doubles et les branches infinies.

Exercice n°7 ***Astroïde***

Soit $a > 0$. Étudier la courbe $\mathscr{C}$ définie par $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

La tangente en un point M de $\mathscr{C}$ coupe (en général) (Ox) et (Oy) en les points P et Q. Montrer que PQ est une constante que l'on notera k.

Montrer qu'une droite coupant respectivement (Ox) et (Oy) en des points P et Q tels que $PQ = k$ est tangente à $\mathscr{C}$.

Exercice n°8

Soit $a > 0$. Étudier les courbes suivantes en cherchant à chaque fois à réduire au maximum l'intervalle d'étude.

1) ***Coube de Lissajous*** $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2) ***Cycloïde*** $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \sin t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

3) ***Rosace à quatre feuilles*** $\begin{cases} x(t) = a\sin(2t)(\sin t - \cos t) \\ y(t) = a\sin(2t)(\sin t + \cos t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Exercice n°9 ***folium de Descartes***

Construire la courbe d'équations paramétriques : $x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Étudier les points doubles et les branches infinies.

Donner une équation cartésienne de la courbe.

Exercice n°10 *(R : Ex 15)*

Construire la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, a réel strictement positif donné (folium de Descartes).

Exercice n°11

Étudier les courbes $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+t-2}{t^2-2t} \\ y(t) = \dfrac{t^2+t-2}{t-2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0,2\}$ et $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

Exercice n°12

Soit $a > 0$. Étudier la courbe $\mathscr{C}$ définie par $\begin{cases} x(t) = a\sin t \\ y(t) = a\dfrac{\sin^2 t}{\cos t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

M étant un point de $\mathscr{C}$, la perpendiculaire à (OM) passant par M coupe (Oy) en un point N. Montrer que $MN = a$.
Vérifier que la normale en M à $\mathscr{C}$, la perpendiculaire à (OM) passant par O et la parallèle à (Ox) passant par N son concourantes. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

Courbes en coordonnées polaires

Exercice n°13 *(R : Ex 10)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation polaire $r = 1 + 2\cos(\theta)$.
Déterminer l'angle polaire de la tangente à $\mathscr{C}$ en les points $M(\frac{\pi}{2})$ et $M(\frac{2\pi}{3})$.
Dans chaque cas, fournir une équation cartésienne de la tangente considérée.

Exercice n°14 *(R : Ex 11)*

Étudier le point $M(\frac{\pi}{2})$ dans les deux cas suivants : 1) $r = \cos(\theta)$ 2) $r = \cos^2(\theta)$.

Exercice n°15 *(R : Ex 12 et Ex 13)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.

1) Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe d'équation polaire $r = 1 + \cos^2(\theta)$.

2) Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe d'équation polaire $r = \cos(\theta) + \sin(\theta)$.

3) Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe d'équation polaire $r = \tan(\dfrac{2\theta}{3})$.

Exercice n°16 *(G : Exemp 6.10)*

Étudier la courbe d'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Exercice n°17

Construire les courbes d'équations polaires respectives :

1) $r(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin(2\theta)}$ **2)** $r(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ **3)** $r(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}$