Math2 – Chapitre 3
Intégrales multiples

3.1 – Intégrales de Riemann (rappels de TMB)

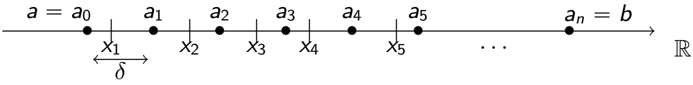
Dans cette section:

- Subdivisions, somme de Riemann et intégrale de Riemann d'une fonction d'une variable
- Aire sous le graphe d'une fonction
- Primitives et techniques d'intégration

Subdivision, somme et intégrale de Riemann

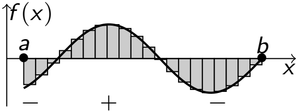
Rappels – Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable:

- **subdivision** de $[a, b]$: $\mathcal{S}_n = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$



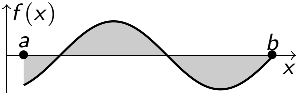
- **somme de Riemann de** f aux points $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$:

$$R_\delta(f; \{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \delta.$$



- **intégrale de Riemann de** f **sur** $[a, b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{tout } x_i}} R_\delta(f; \{x_i\})}$$

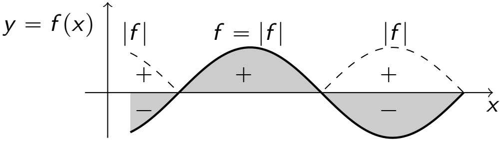


si la limite <u>existe</u>, est <u>finie</u>, et <u>ne dépend pas des x_i</u>.

L'intégrale donne l'aire sous le graphe

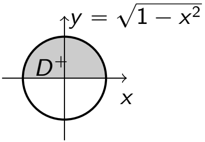
Rappels -

- $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \text{ aire "algébrique" sous le graphe de } f}$
- $\boxed{\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{ aire sous le graphe de } f}$ (positive)



Exemple: L'aire du disque

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$



se calcule comme une intégrale:

$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\,\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Primitives et techniques d'intégration

Pour connaitre l'intégral, il suffit de connaitre une primitive:

- Une **primitive de f sur** $[a, b]$ est une fonction F dérivable telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. On note $F(x) = \int f(x) dx$.
- **Théorème fondamental:**

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

- **Intégration par changement de variable:** $x = h(t)$

$$\int f(x)\, dx = \int f\big(h(t)\big)\; h'(t)\, dt,$$

où h est un <u>difféomorphisme</u> (bijection dérivable avec réciproque h^{-1} dérivable).

- **Intégration par parties:**

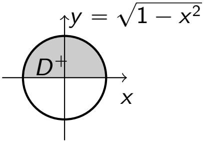
$$\int f(x)\; g'(x)\, dx = f(x)\; g(x) - \int f'(x)\; g(x)\, dx.$$

Problème – Pas d'analogue pour les fonctions de plusieurs variables!

Exemple: aire d'un disque

Aire d'un disque –

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$



$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx$$

Calcul par changement de variable: $x = \sin t$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, car $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Alors $dx = \cos t\ dt$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}\,(D) &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\ dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

3.2 – Intégrales doubles

Dans cette section:

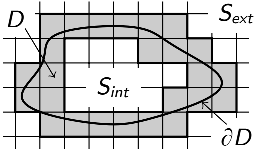
- Subdivisions des domaines du plan
- Sommes de Riemann des fonctions de deux variables
- Intégrale double
- Volume sous le graphe d'une fonction
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Subdivisions d'un domaine du plan

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné, avec bord ∂D lisse (au moins par morceaux).

Définition – Pour tout $\delta > 0$, on appelle **subdivision de** D l'ensemble $\mathcal{S}_\delta$ des carrés K_i de coté δ du plan qui couvrent D dans n'importe quel grillage de pas δ.
En particulier, on considère deux recouvrements:

- un **à l'extérieur** $\mathcal{S}_\delta^{ext}$,
- un **à l'intérieur** $\mathcal{S}_\delta^{int}$.



Puisque D est borné, les subdivisions contiennent un nombre fini de carrés, et on a $\mathcal{S}_\delta^{int} \subset \mathcal{S}_\delta^{ext}$.

Les carrés dans $\mathcal{S}_\delta^{ext} \backslash \mathcal{S}_\delta^{int}$ couvrent exactement le bord ∂D.

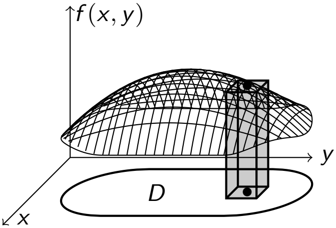
Sommes de Riemann d'une fonction de deux variables

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Définition – Pour tout choix de points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$, on appelle **sommes de Riemann de** f associées aux subdivisions $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ et aux points $\{(x_i, y_i)\}$ les sommes

$$R_\delta^{ext/int}(f, \{(x_i, y_i)\}) = \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta^{ext/int}} f(x_i, y_i)\ \delta^2,$$

où chaque terme $f(x_i, y_i)\ \delta^2$ représente le **volume algébrique** ($= \pm$ volume) du parallélepipède de base K_i et hauteur $f(x_i, y_i)$.



Intégrale double

Théorème – *Si les limites* $\lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\})$ *existent et elles sont indépendantes du choix des points* $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$*, alors elles coincident.*

Définition – Dans ce cas:
• on appelle **intégrale double de** f **sur** D cette limite:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\}).$$

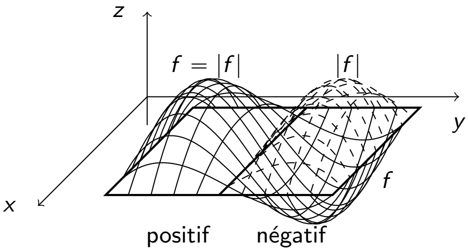
• on dit que f **est intégrable sur** D **selon Riemann** si l'intégrale $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ est finie ($=$ nombre, pas $\pm\infty$).

Proposition – *Toute fonction* f *<u>continue</u> est intégrable selon Riemann sur un ensemble* D *<u>borné</u> à <u>bord lisse</u> (par morceaux).*

Signification géométrique de l'intégrale double

Corollaire –

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$ *volume "algébrique" sous le graphe de* f.
- $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy =$ *volume sous le graphe de* f.



Exemple 1: volume d'une boule

Volume d'une boule – Le volume de la boule

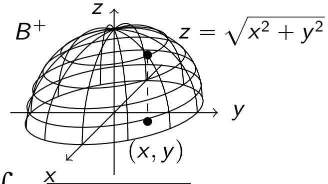
$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\right\}$$

est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\right\},$$

qui se trouve sous le graphe de la fonction

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$



On a alors

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$ est le disque unitaire.

Propriétés des intégrales doubles

Propriétés – 1) *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)\, dx\, dy = \lambda \iint_D f\, dx\, dy + \mu \iint_D g\, dx\, dy.$$

2) *Si* $D = D_1 \cup D_2$ *et* $D_1 \cap D_2 =$ *courbe ou point ou* $\emptyset$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

3) $$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

4) *Si* $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in D$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leqslant \iint_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

Théorème de Fubini sur un rectangle

Théorème de Fubini sur un rectangle – *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $D = [a, b] \times [c, d]$ *un rectangle. Alors on a*

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\, dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy\end{aligned}}$$

Notation – $\displaystyle \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy \right) dx$

Corollaire – $\displaystyle \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy$

Exemple 2: calcul d'intégrales doubles

Exemples –

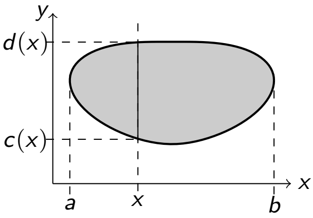
- $$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy$$
  $$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

- $$\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2y-1)\,dy$$
  $$= \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1}$$
  $$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$$

Théorème de Fubini

Lemme – *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné quelconque.*

- *Pour tout $(x, y) \in D$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$.*
- *Pour tout $x \in [a, b]$ il existe $c(x), d(x) \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$.*



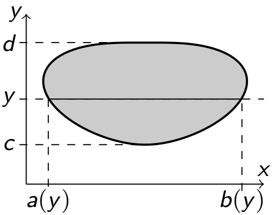
Au final:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y \in [c(x), d(x)] \}$$

Théorème de Fubini sur D – *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors*

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx}$$

Théorème de Fubini (suite)



Alternative –

L'ensemble D est décrit par

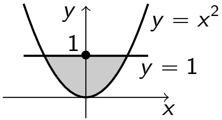
$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ x \in [a(y), b(y)] \}$$

Théorème de Fubini sur D **–**

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy}$$

Exemple 3: calcul d'intégrale double

Exemple – Soit D la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut.



On peut décrire D comme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [x^2, 1]\}.$$

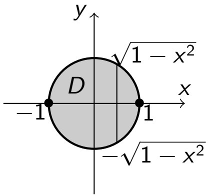
Par conséquent:

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y \ dx \ dy &= \int_{-1}^{1} x^2 \ dx \ \int_{x^2}^{1} y \ dy \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \ \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{x^2}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^4) \ dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Exemple 4: volume de la boule

Exemple – Rappelons que le volume de la boule unitaire est

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$



où $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

On peut décrire D comme l'ensemble

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in \left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2} \right] \right\}.$$

- Voici donc le calcul du volume de la boule:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(B) &= 2 \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy \\ &= 2 \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{1 - x^2}}\, dy. \end{aligned}$$

- On pose $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$ pour avoir $\sqrt{1 - \frac{y^2}{1-x^2}} = |\cos t|$.

Exemple 4: volume de la boule (suite)

- $y = \sqrt{1-x^2}\,\sin t \qquad dy = \sqrt{1-x^2}\,\cos t\,dt$
- $-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$

  $\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \quad$ et $\quad \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = \cos t$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy \\
&= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2}\,\cos t\,\sqrt{1-x^2}\,\cos t\;dt \\
&= 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\;dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\;dt
\end{aligned}$$

- puisque $\quad 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\;dt = \pi$ (voir ex. précédent)

$$\mathrm{Vol}\,(B) = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\;dx = \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$(x, y) = h(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big)$$

est un difféomorphisme $h : \tilde{D} \to D : \ (u, v) \mapsto h(u, v) = (x, y)$,
c'est-à-dire une bijection de classe C^1 avec réciproque
$h^{-1} : D \to \tilde{D} : \ (x, y) \mapsto h^{-1}(x, y) = (u, v)$ de classe C^1.

Théorème – *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction des variables (x, y) et $(x, y) = h(u, v)$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\tilde{D}} \tilde{f}(u, v)\, \Big|\det J_h(u, v)\Big|\, du\, dv}$$

où $\quad \tilde{f}(u, v) = f(h(u, v)), \quad \tilde{D} = \big\{(u, v) \mid h(u, v) \in D\big\}$
et $\quad \det J_h(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ $\quad$ *est le Jacobien de h.*

Passage en polaire – $\boxed{dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\varphi}$

Exemple 5: volume d'une boule en polaires

Volume de la boule en coordonnées polaires – On calcul

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_{D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

en coordonnées polaires $\quad (x,y) = h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

- Puisque $x^2+y^2=\rho^2$, on a :

$$\tilde{D} = \big\{(\rho,\varphi) \in\ ]0,\infty[\times[0,2\pi[\ \big|\ \rho \leqslant 1\big\} = \ ]0,1] \times [0,2\pi[$$

- on utilise $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$, $\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2}$ et Fubini:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\,d\rho$$

- enfin, on pose $\quad t = 1-\rho^2 \quad$ donc $\quad dt = -2\rho\,d\rho$:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = -\frac{4\pi}{2}\int_1^0 t^{1/2}\ dt = 2\pi\int_0^1 t^{1/2}\ dt = 2\pi\frac{2}{3}\Big[t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

3.3 – Intégrales triples

Dans cette section:

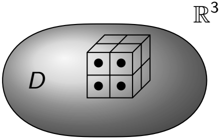
- Subdivisions des solides
- Sommes de Riemann des fonctions de trois variables
- Intégrales triples
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Intégrale triple

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble <u>borné</u> avec bord $\partial\Omega$ <u>lisse</u> (par morceaux), et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables.

Définition –

• On choisit une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de Ω en petits <u>cubes</u> K_i de taille δ^3, avec δ qui tend vers zéro.



• On définit l'**intégrale triple de** f **sur** Ω comme la limite (quand elle existe) de la **somme de Riemann** associée à $\mathcal{S}_\delta$ et à des points $(x_i, y_i, z_i) \in K_i \cap \Omega$ quelconque:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\delta \to 0} \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta} f(x_i, y_i, z_i)\,\delta^3.$$

• On dit que f est **intégrable** si son intégrale est finie.

Proposition – *Toute fonction f <u>continue</u> est intégrable selon Riemann sur un ensemble Ω <u>borné</u> à <u>bord lisse</u> (par morceaux).*

Signification géométrique et propriétés

Signification géométrique – *Le graphe de f est une <u>hyper-surface</u> de $\mathbb{R}^4$* (difficile à dessiner)*:*

- $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$ *<u>quadri-volume</u> "algébrique" sous le graphe de f.*
- $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz =$ *<u>quadri-volume</u> sous le graphe de f.*

Propriétés – 1) *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iiint\limits_{\Omega} \big(\lambda f + \mu g\big)\,dx\,dy\,dz = \lambda \iiint\limits_{\Omega} f\,dx\,dy\,dz + \mu \iiint\limits_{\Omega} g\,dx\,dy\,dz.$$

2) *Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 =$ surface ou courbe ou point ou $\emptyset$, alors*

$$\iiint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_1} f\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{\Omega_2} f\,dx\,dy\,dz.$$

etc

Théorème de Fubini

Théorème de Fubini – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.*

- *Si Ω est un parallélépipède, alors*

$$\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\ f(x, y, z)}$$

(on intègre dans l'ordre qu'on veut)

- *Si Ω est un ensemble borné quelconque, alors:*

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \middle| \, x \in [a, b],\ \ y \in [c(x), d(x)],\ \ z \in [e(x,y), g(x,y)] \right\}$$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\ f(x, y, z)}$$

(l'ordre d'intégration est forcé)

Exemple 1: calcul d'intégrales triples

Exemple – $\Omega = [0,1]\times[1,2]\times[2,3] \subset \mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} (x^2 - 2yz)\, dx\, dy\, dz \quad &= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\, (x^2 - 2yz) \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz \right) \quad = \int_2^3 \left[\frac{1}{3}y - y^2 z \right]_{y=1}^{y=2} dz \\
&= \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z \right) dz \quad = \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z \right) dz \\
&= \left[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2 \right]_2^3 \quad = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \quad = -\frac{43}{6}
\end{aligned}
$$

Exemple 2: calcul d'intégrales triples

Exemple – On veut calculer $\displaystyle\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz$

où Ω est le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ z=0\Big\}.$$

- D'abord, on décrit explicitement Ω :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Big\{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\Big\} \\ &= \Big\{(x,y,z) \,|\, x\in[-1,1],\ y\in\big[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\big],\ z\in[0,3]\Big\}\end{aligned}$$

- Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\,dx\,dy \\ &= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\ (1-2yz)\end{aligned}$$

Exemples 2 (suite)

Exemple (suite) –

$$\iiint\limits_{\Omega} (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\,dy$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \left[y - y^2 z\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z\right) dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\ dt$$

$$= 3\pi$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$\vec{x} = (x, y, z) = h(u, v, w) = \big(x(\vec{u}), y(\vec{u}), z(\vec{u})\big)$$

est un <u>difféomorphisme</u> $\quad h : \tilde{\Omega} \to \Omega : \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = \vec{x}$
(bijection C^1 avec réciproque $h^{-1}(\vec{x}) = \vec{u}$ aussi C^1).

Théorème – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de $\vec{x}$ et $\vec{x} = h(\vec{u})$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iint_D f(\vec{x})\, dx\, dy\, dz = \iint_{\tilde{\Omega}} f\big(h(\vec{u})\big) \, \Big|\det J_h(\vec{u})\Big| \, du\, dv\, dw}$$

où $\quad \tilde{\Omega} = \big\{\vec{u} \mid h(\vec{u}) \in \Omega\big\}$ *et* $\quad \det J_h(\vec{u}) \quad$ *est le Jacobien de* h*.*

Passage en coordonnées cylindriques et sphériques –

$$\boxed{dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta}$$

Exemple 3: intégrale par changement de variables

Exemple – Considérons à nouveau $\displaystyle\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz$

où Ω est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque D.

- En coordonnées cylindriques, on a

$$\Omega = \left\{ (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in \left]0,1\right],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ z \in [0,3] \right\}$$

- Puisque $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, on a

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho \ \int_0^{2\pi} (1-2\rho\sin\varphi z)\ d\varphi \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\,\Big[\,\varphi + 2\rho\cos\varphi z\,\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(\,2\pi + 2\rho z - 2\rho z\,\Big)\ \rho\,d\rho \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\,d\rho \quad = 3\ \pi\ \Big[\,\rho^2\,\Big]_0^1 \quad = 3\pi\end{aligned}$$

3.4 – Aire, volume, moyenne, centre de masse

Dans cette section:

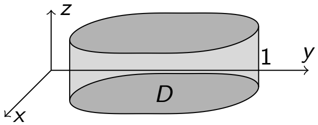
- Aire d'un domaine du plan
- Volume d'un solide
- Quantités totale et moyenne
- Centre de masse et moment d'inértie

Motivation pour la définition générale d'aire

Remarque – Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale

$$\iint_D dx\ dy$$

représente le volume sous le graphe de la fonction $f(x, y) = 1$.



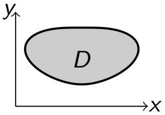
Ce solide Ω est un cylindre de hauteur $H = 1$ et de base D:

$$\iint_D dx\ dy = \mathrm{Vol}\,(\Omega) = \mathrm{Aire}\,(D) \times H = \mathrm{Aire}\,(D).$$

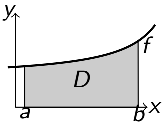
Aire d'un domaine du plan

Définition – L'**aire** d'un domaine D borné de $\mathbb{R}^2$ est

$$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D dx\,dy}$$



Proposition – *Si D est la portion du plan sous le graphe d'une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si*



$$D = \big\{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\big\},$$

alors:

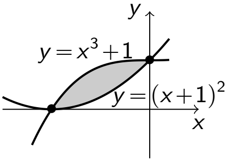
$$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

- En effet: $\displaystyle \iint_D dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\,dx.$

Exercice: aire d'un domaine du plan

Énoncé – Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

Réponse – D'abord on dessine D et on trouve les deux points d'intersection des courbes: $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.



On a donc

$$D = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1 \Big\}.$$

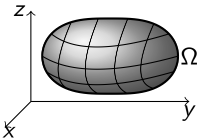
Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}\,(D) &= \iint_D dx\, dy \quad = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\ &= \int_{-1}^{0} \big(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1 \big)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

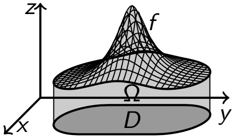
Volume d'un solide

Définition – Le **volume** d'un solide Ω borné de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz}$$



Proposition – *Si Ω est l'espace sous le graphe d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire si*



$$\Omega = \big\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ z \in [0, f(x, y)]\big\},$$

alors: $$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iint_{D} f(x, y)\,dx\,dy}$$

- Car $\displaystyle \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint_{D} dx\,dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_{D} f(x, y)\,dx\,dy.$

Exemple 1: volume d'une boule en sphériques

Volume de la boule en coordonnées sphériques – En coordonnées sphériques, la boule unité B s'écrit

$$B = \Big\{(r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ \theta \in [0,\pi]\Big\}.$$

Puisque $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_B dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta \\
&= \int_0^1 r^2\,dr \ \int_0^{2\pi} d\varphi \ \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\ 2\pi\ \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\ (1+1) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Quantités totale et moyenne

Définition – En physique, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ représente une *concentration* de matière (une *densité volumique*), ou une *densité* de courant ou d'énergie, alors on appelle

• **quantité totale** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

• **quantité moyenne** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Exemple 2: moyenne

Exemple – Un matériau est réparti dans un cube $\Omega = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}$.

- La quantité totale du matériau est alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^R dx \int_0^R (x+y)\,dy \int_0^R \frac{1}{(z+1)^2}\,dz$$
$$= \int_0^R \Big[xy + \frac{1}{2}y^2\Big]_{y=0}^{y=R} dx \,\Big[-\frac{1}{z+1}\Big]_0^R$$
$$= \int_0^R \Big(Rx + \frac{1}{2}R^2\Big)dx\,\Big(1 - \frac{1}{R+1}\Big)$$
$$= \Big[\frac{1}{2}Rx^2 + \frac{1}{2}R^2 x\Big]_0^R \,\frac{R}{R+1} = \frac{R^4}{R+1}.$$

- Puisque $\mathrm{Vol}(\Omega) = R^3$, la quantité moyenne est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{R^3}\,\frac{R^4}{R+1} = \frac{R}{R+1}.$$

Barycentre

Définition – Si $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ denote la *densité de masse* d'un matiériau contenu dans Ω, on appelle

- **masse totale** le nombre $M = \iiint\limits_D \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

- **centre de masse** (ou **centre d'inertie**, ou **barycentre**) le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint\limits_D x\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$
$$y_G = \frac{1}{M} \iiint\limits_D y\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$
$$z_G = \frac{1}{M} \iiint\limits_D z\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Moment d'inertie

Définition (suite) – Si $r(x,y,z)$ est la distance d'un point (x,y,z) à un point fixé P ou à une droite Δ:

• le **moment d'inertie** par rapport à P ou à Δ est le nombre

$$\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} r^2(x,y,z)\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Nota – Un matériau est dit **homogène** si sa densité de masse μ est constante. Dans ce cas, sa masse dedans Ω est donnée par l'intégrale

$$M = \mu \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \mu\,\mathrm{Vol}\,(\Omega),$$

et les formules du centre de masse et du moment d'inértie se modifient en conséquence.

Exemple 3: centre de masse

Exemple – On cherche à déterminer le centre de masse du demi-cylindre homogène ($\mu = 1$)

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ z \in [0, H],\ y \geqslant 0\}.$$

• Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le demi-cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \{(\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, \pi],\ z \in [0, H]\}.$$

• Le calcul de la masse totale donne

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz \quad = \iiint_{\tilde{\Omega}} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\ &= \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^H dz \quad = \frac{\pi R^2 H}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 3 (suite)

- Le centre de masse G a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\tilde{\Omega}} (\rho\cos\varphi)\ \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho\int_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi\ \int_0^H dz = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho\ \int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi\ \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H}\ \frac{R^3}{3}\ 2\ H = \frac{4R}{3\pi} \\
z_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho\,d\rho\ \int_0^\pi d\varphi\ \int_0^H z\,dz = \frac{2}{\pi\ R^2 H}\ \frac{R^2}{2}\ \pi\ \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2}\right)$.

Exercice 1: quantité totale et moyenne

Énoncé – *De la farine s'éparpille au sol selon la densité*

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}, \quad \text{où } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Trouver la quantité totale et moyenne de farine éparpillée sur un disque D de rayon $R > 0$ centré en l'origine.

Réponse – En coord. polaires, on a $f(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{(\rho+1)^2}$ et $D = \{ (\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi[\}$. Ainsi:

$$\begin{aligned}
\text{Quantité totale} &= \iint_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\, d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^R \Big(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \Big)\ d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^R \Big(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \Big)\ d\rho \\
&= 2\pi \Big[\ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1} \Big]_0^R = 2\pi\ \Big(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \Big).
\end{aligned}$$

Exercice 1 (suite)

Au final:

$$\text{Quantité totale} = 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right).$$

Puisque

$$\mathrm{Aire}\,(D) = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\, 2\pi = \pi R^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Quantité moyenne} \quad &= \frac{1}{\mathrm{Aire}\,(D)} \iint\limits_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= \frac{2}{R^2} \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right). \end{aligned}$$

Exercice 2: centre de masse

Exercice – *Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B et du cylindre C suivants:*

$$\begin{aligned} B &= \Big\{(r,\varphi,\theta) \;\Big|\; r\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in[\pi/2,\pi]\Big\} \\ C &= \Big\{(\rho,\varphi,z) \;\Big|\; \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi],\ z\in[0,R]\Big\}, \end{aligned}$$

et avec la densité de masse $\mu(x,y,z) = z^2$.

Réponse – Puisque $\Omega = B\cup C$, et $B\cap C =$ courbe, le centre de masse G a coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M_\Omega}\iiint\limits_{\Omega} x\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{(idem pour } y_G \text{ et } z_G\text{)},$$

où $\quad M_\Omega = M_B + M_C \quad$ et $\quad \displaystyle\iiint\limits_{\Omega} = \iiint\limits_{B} + \iiint\limits_{C}.$

• Les intégrales se calculent:
en coordonnées sphériques sur B, où $\mu(r,\varphi,\theta) = r^2\cos^2\theta$,
en coordonnées cylindriques sur C, où $\mu(\rho,\varphi,z) = z^2$.

Exercice 2 (suite)

- Calcul de la masse de Ω:

$$\begin{aligned}
M_B &= \iiint\limits_B r^2\cos^2\theta\ r^2\sin\theta\ dr\,d\varphi\,d\theta \\
&= \int_0^R r^4\,dr\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{R^5}{5}2\pi\Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_{\pi/2}^{\pi} \quad = \frac{2\pi R^5}{15} \\
M_C &= \iiint\limits_C z^2\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^R \rho\,d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_0^R z^2\,dz \quad = \frac{R^2}{2}\ 2\pi\ \frac{R^3}{3} \quad = \frac{\pi R^5}{3}
\end{aligned}$$

Au final: $\quad M_\Omega = M_B + M_C = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right)\pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}.$

Exercice 2 (suite)

- Puisque $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 0$, on a:

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_{\Omega} x \, \mu(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 \, dr \ \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \ \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \ \int_0^R z^2 \, dz \quad = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_{\Omega} y \, \mu(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 \, dr \ \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \ \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \ \int_0^R z^2 \, dz \quad = 0
\end{aligned}
$$

Exercice 2 (suite)

Enfin:

$$
\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_{\Omega} z\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta \sin\theta\,d\theta \\
&\qquad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^3\,dz \\
&= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6}\, 2\pi \left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^4}{4} \right) \\
&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{15R^3}{7}\, \frac{2}{12} \\
&= \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}
$$

Exercice 2 (suite)

- En conclusion, le barycentre G de Ω a pour coordonnées

$$G = (0, 0, 5R^3/14)$$

Puisque $5R^3/14 > 0$, il se trouve dans la partie cylindrique.

- Le barycentre se trouve à l'intérieur de Ω si

$$5R^3/14 \leqslant R$$

c'est-à-dire si $R \leqslant \sqrt{14/5}$.