

# Sur les groupes de tresses et leurs généralisations : ordonnabilité, géométrie, et algorithmique

Bert Wiest

Maître de conférences  
IRMAR, Université de Rennes 1

Habilitation à diriger des recherches, 13 décembre 2005

- 1 **Notions de base : ordres, tresses**
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $\text{Diff}^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

- 1 **Notions de base : ordres, tresses**
- 2 **Ordres sur les groupes des tresses**
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $\text{Diff}^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

# Groupes ordonnables

**Définition** Un groupe  $G$  est *ordonnable à gauche* (LO) s'il existe un ordre total  $<$  sur  $G$  t.q.

$$\forall g, h, k, (g < h \implies kg < kh)$$

Il est *bi-ordonnable* (BiO) si, en plus,

$$\forall g, h, k, (g < h \implies gk < hk).$$

**Remarque**      BiO  $\implies$  LO  $\implies$  sans torsion

**Question ouverte**  $G$  sans torsion  $\stackrel{?}{\implies}$   $\mathbb{Z}G$  sans diviseurs de zéro ?  
Vrai si  $G$  est LO.



# Groupes ordonnables

**Définition** Un groupe  $G$  est *ordonnable à gauche* (LO) s'il existe un ordre total  $<$  sur  $G$  t.q.

$$\forall g, h, k, (g < h \implies kg < kh)$$

Il est *bi-ordonnable* (BiO) si, en plus,

$$\forall g, h, k, (g < h \implies gk < hk).$$

**Remarque**  $\text{BiO} \implies \text{LO} \implies \text{sans torsion}$

**Question ouverte**  $G$  sans torsion  $\stackrel{?}{\implies} \mathbb{Z}G$  sans diviseurs de zéro ?  
Vrai si  $G$  est LO.

# Groupes ordonnables

**Définition** Un groupe  $G$  est *ordonnable à gauche* (LO) s'il existe un ordre total  $<$  sur  $G$  t.q.

$$\forall g, h, k, (g < h \implies kg < kh)$$

Il est *bi-ordonnable* (BiO) si, en plus,

$$\forall g, h, k, (g < h \implies gk < hk).$$

**Remarque**  $\text{BiO} \implies \text{LO} \implies$  sans torsion

**Question ouverte**  $G$  sans torsion  $\stackrel{?}{\implies} \mathbb{Z}G$  sans diviseurs de zéro?  
Vrai si  $G$  est LO.

# Ordonnabilité et actions sur 1-variétés

**Remarque** Si  $G$  de type fini, alors

$G$  ordonnable à gauche  $\iff G$  agit par homéos sur  $\mathbb{R}$  (fidèlement)

**Question ouverte**

Propriété (T) de Kazhdan, est-elle une obstruction à être LO ?

**Réponse "oui" partielle** Les sous-groupes de  $Diff^+(\mathbb{R})$ , voire  $Diff^+(S^1)$ , ne satisfont pas (T). [Ghys,Burger,Navas]

# Ordonnabilité et actions sur 1-variétés

**Remarque** Si  $G$  de type fini, alors

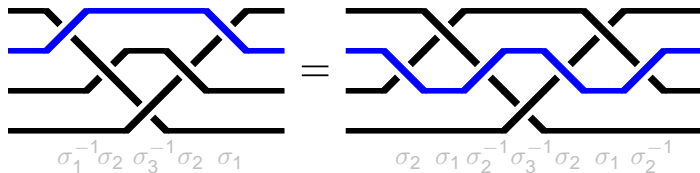
$G$  ordonnable à gauche  $\iff G$  agit par homéos sur  $\mathbb{R}$  (fidèlement)

## Question ouverte

Propriété (T) de Kazhdan, est-elle une obstruction à être LO ?

**Réponse "oui" partielle** Les sous-groupes de  $Diff^+(S^1)$ , voire  $Diff^+(\mathbb{R})$ , ne satisfont pas (T). [Ghys,Burger,Navas]

# Les groupes de tresses et leurs généralisations



Définitions équivalentes du groupe de tresses à  $n$  brins,  $B_n$  :

- groupe des tresses à  $n$  brins, à déformation près.

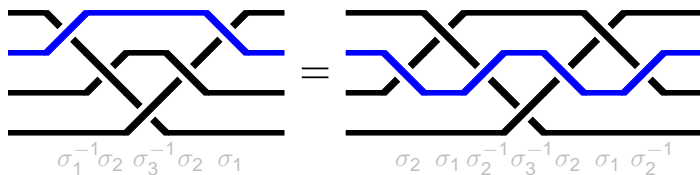
- $B_n \cong \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i \text{ si } |i - k| \geq 2 \end{array} \rangle$

Généralisation : groupes d'Artin-Tits, groupes de Garside.

- $B_n$  est le groupe d'homéotopies du disque à  $n$  points distingués :  $B_n \cong \mathcal{MCG}(D_n)$ .

Généralisation :  $\mathcal{MCG}(S)$ , où  $S$  est une surface.

# Les groupes de tresses et leurs généralisations



Définitions équivalentes du groupe de tresses à  $n$  brins,  $B_n$  :

- groupe des tresses à  $n$  brins, à déformation près.

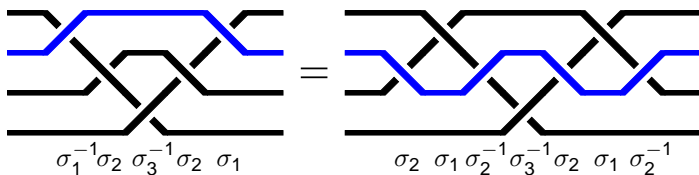
- $B_n \cong \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i \text{ si } |i - k| \geq 2 \end{array} \rangle$

Généralisation : groupes d'Artin-Tits, groupes de Garside.

- $B_n$  est le groupe d'homéotopies du disque à  $n$  points distingués :  
 $B_n \cong \mathcal{MCG}(D_n)$ .

Généralisation :  $\mathcal{MCG}(S)$ , où  $S$  est une surface.

# Les groupes de tresses et leurs généralisations



Définitions équivalentes du groupe de tresses à  $n$  brins,  $B_n$  :

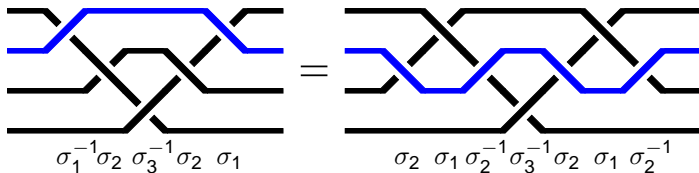
- groupe des tresses à  $n$  brins, à déformation près.
- $B_n \cong \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i \text{ si } |i - k| \geq 2 \end{array} \rangle$

Généralisation : groupes d'Artin-Tits, groupes de Garside.

- $B_n$  est le groupe d'homéotopies du disque à  $n$  points distingués :  
 $B_n \cong \mathcal{MCG}(D_n)$ .

Généralisation :  $\mathcal{MCG}(S)$ , où  $S$  est une surface.

# Les groupes de tresses et leurs généralisations



Définitions équivalentes du groupe de tresses à  $n$  brins,  $B_n$  :

- groupe des tresses à  $n$  brins, à déformation près.

- $B_n \cong \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i \text{ si } |i - k| \geq 2 \end{array} \rangle$

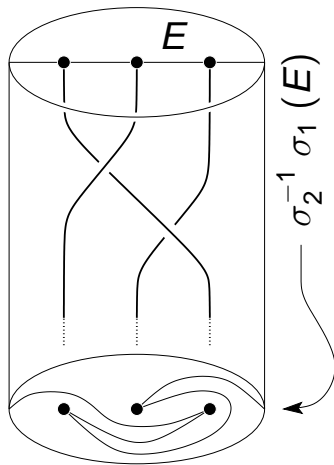
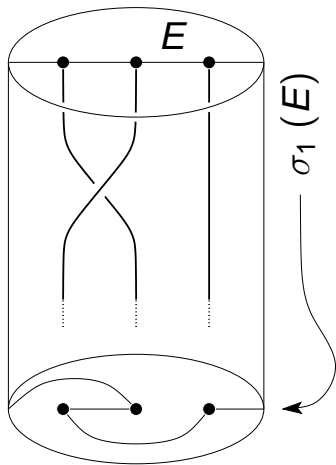
Généralisation : groupes d'Artin-Tits, groupes de Garside.

- $B_n$  est le groupe d'homéotopies du disque à  $n$  points distingués :  
 $B_n \cong \mathcal{MCG}(D_n)$ .

Généralisation :  $\mathcal{MCG}(S)$ , où  $S$  est une surface.

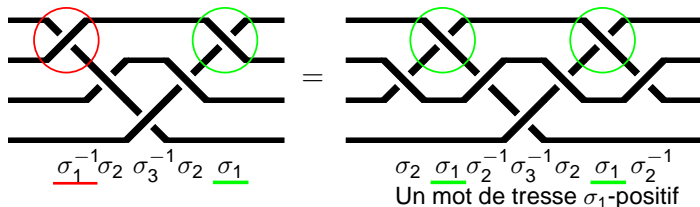


Visualiser des homéomorphismes de  $D_n$  (c.à.d. des éléments de  $\mathcal{MCG}(D_n)$ ) : diagrammes de courbes



- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses**
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

# Les groupes des tresses sont ordonnables



**Théorème** [Dehornoy] Tout  $\beta \in B_n$  satisfait exactement une condition

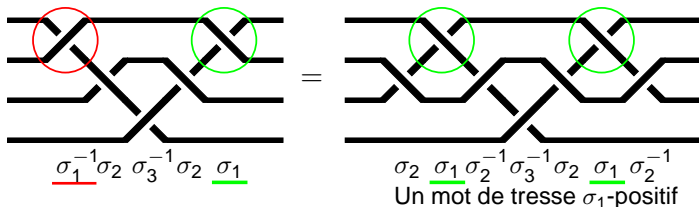
- $\beta$  est trivial
- $\beta$  peut être représenté par un mot  $\sigma$ -positif
- $\beta$  peut être représenté par un mot  $\sigma$ -négatif

**Corollaire**  $B_n$  est ordonnable à gauche :

$$\beta_1 > \beta_2 \quad : \iff \quad \beta_2^{-1} \beta_1 \text{ est } \sigma\text{-positive}$$

**Algorithme** pour trouver représentant  $\sigma$ -cohérent : réduction de poignées.

# Les groupes des tresses sont ordonnables



**Théorème** [Dehornoy] Tout  $\beta \in B_n$  satisfait exactement une condition

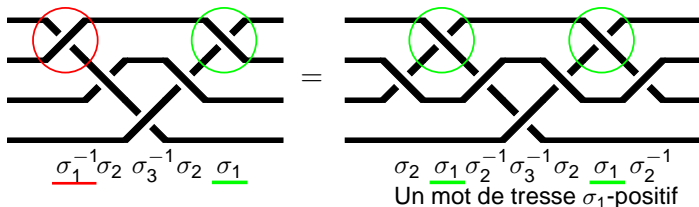
- $\beta$  est trivial
- $\beta$  peut être représenté par un mot  $\sigma$ -positif
- $\beta$  peut être représenté par un mot  $\sigma$ -négatif

**Corollaire**  $B_n$  est ordonnable à gauche :

$$\beta_1 > \beta_2 \quad : \iff \quad \beta_2^{-1} \beta_1 \text{ est } \sigma\text{-positive}$$

**Algorithme** pour trouver représentant  $\sigma$ -cohérent : réduction de poignées.

# Les groupes des tresses sont ordonnables



**Théorème** [Dehornoy] Tout  $\beta \in B_n$  satisfait exactement une condition

- $\beta$  est trivial
- $\beta$  peut être représenté par un mot  $\sigma$ -positif
- $\beta$  peut être représenté par un mot  $\sigma$ -négatif

**Corollaire**  $B_n$  est ordonnable à gauche :

$$\beta_1 > \beta_2 \quad : \iff \quad \beta_2^{-1} \beta_1 \text{ est } \sigma\text{-positive}$$

**Algorithme** pour trouver représentant  $\sigma$ -cohérent : réduction de poignées.

\* \* \* Démonstration de l'algorithme de Dehornoy \* \* \*

# Est-ce que l'algorithme de Dehornoy est efficace ?

**Conjecture** après expériences systématiques sur ordinateur : OUI !

**Conjecture** Tresse input à  $n$  brins, de longueur  $\ell$ , alors

- longueur des tresses obtenues  $\leq C \cdot n \cdot \ell$ , — [DYNNIKOV,W]
- nombre d'étapes (réductions) nécessaires  $\leq C \cdot n \cdot \ell^2$ .

**Théorème** [Dehornoy]

- longueur des tresses obtenues  $\leq (n-1)^{\ell n(n-1)/2}$ ,
- nombre étapes (réductions) nécessaires  $\leq 2^{n^4 \ell}$ .

Ceci renvoie à une question profonde sur

**la nature des quasi-géodésiques dans  $B_n$  :**

sont-elles stables par certaines déformations ?  $\implies$  [Dehornoy, W]

# Est-ce que l'algorithme de Dehornoy est efficace ?

**Conjecture** après expériences systématiques sur ordinateur : OUI !

**Conjecture** Tresse input à  $n$  brins, de longueur  $\ell$ , alors

- longueur des tresses obtenues  $\leq C \cdot n \cdot \ell$ ,  $\rightarrow$  [DYNNIKOV,W]
- nombre d'étapes (réductions) nécessaires  $\leq C \cdot n \cdot \ell^2$ .

**Théorème** [Dehornoy]

- longueur des tresses obtenues  $\leq (n-1)^{\ell n(n-1)/2}$ ,
- nombre étapes (réductions) nécessaires  $\leq 2^{n^4 \ell}$ .

Ceci renvoie à une question profonde sur

**la nature des quasi-géodésiques dans  $B_n$  :**

sont-elles stables par certaines déformations ?  $\implies$  [Dehornoy, W]



# Est-ce que l'algorithme de Dehornoy est efficace ?

**Conjecture** après expériences systématiques sur ordinateur : OUI !

**Conjecture** Tresse input à  $n$  brins, de longueur  $\ell$ , alors

- longueur des tresses obtenues  $\leq C \cdot n \cdot \ell$ ,  $\rightarrow$  [DYNNIKOV,W]
- nombre d'étapes (réductions) nécessaires  $\leq C \cdot n \cdot \ell^2$ .

**Théorème** [Dehornoy]

- longueur des tresses obtenues  $\leq (n-1)^{\ell n(n-1)/2}$ ,
- nombre étapes (réductions) nécessaires  $\leq 2^{n^4 \ell}$ .

Ceci renvoie à une question profonde sur

**la nature des quasi-géodésiques dans  $B_n$  :**

sont-elles stables par certaines déformations ?  $\implies$  [Dehornoy, W]

# Est-ce que l'algorithme de Dehornoy est efficace ?

**Conjecture** après expériences systématiques sur ordinateur : OUI !

**Conjecture** Tresse input à  $n$  brins, de longueur  $\ell$ , alors

- longueur des tresses obtenues  $\leq C \cdot n \cdot \ell$ ,  $\rightarrow$  [DYNNIKOV,W]
- nombre d'étapes (réductions) nécessaires  $\leq C \cdot n \cdot \ell^2$ .

**Théorème** [Dehornoy]

- longueur des tresses obtenues  $\leq (n-1)^{\ell n(n-1)/2}$ ,
- nombre étapes (réductions) nécessaires  $\leq 2^{n^4 \ell}$ .

Ceci renvoie à une question profonde sur

**la nature des quasi-géodésiques dans  $B_n$  :**

sont-elles stables par certaines déformations ?  $\implies$  [Dehornoy, W]

# Est-ce que l'algorithme de Dehornoy est efficace ?

**Conjecture** après expériences systématiques sur ordinateur : OUI !

**Conjecture** Tresse input à  $n$  brins, de longueur  $\ell$ , alors

- longueur des tresses obtenues  $\leq C \cdot n \cdot \ell$ ,  $\rightarrow$  [DYNNIKOV,W]
- nombre d'étapes (réductions) nécessaires  $\leq C \cdot n \cdot \ell^2$ .

**Théorème** [Dehornoy]

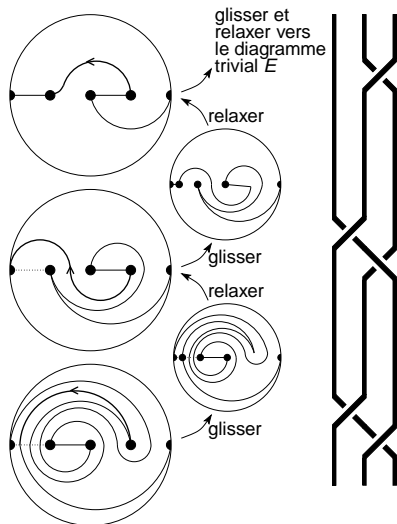
- longueur des tresses obtenues  $\leq (n-1)^{\ell n(n-1)/2}$ ,
- nombre étapes (réductions) nécessaires  $\leq 2^{n^4 \ell}$ .

Ceci renvoie à une question profonde sur

**la nature des quasi-géodésiques dans  $B_n$  :**

sont-elles stables par certaines déformations ?  $\implies$  [Dehornoy, W]

# Démonstration topologique que tout élément de $B_n$ a un représentant $\sigma$ -cohérent



**But** Si le diagramme des courbes de  $\beta$  est positif, construire un mot  $\sigma$ -positif représentant  $\beta$ .

**Idée :** Relaxer le diagramme en glissant des points le long des arcs de la forme



**Détails :**  
[Fenn, Greene, Rourke, Rolfsen, W]

# Généralisation de la construction topologique de l'ordre

Soit  $S$  une surface hyperbolique à bord non-vide ; donc  $\tilde{S} \subset \mathbb{H}^2$ .  
Alors  $MCG(S)$  agit sur

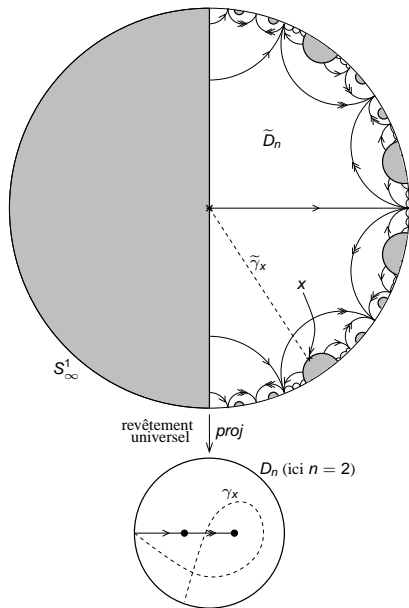
$$\partial\tilde{S} \setminus \{*\} \quad (\text{dans } \overline{\mathbb{H}^2}),$$

qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .

Pour toute orbite libre de cette action de  $MCG(S)$  sur  $\mathbb{R}$  on a un ordre (LO) de  $MCG(S)$ .

**Classification des tels ordres sur  $B_n$**  dans [Short,Wiest].

**Exemple :** sur  $B_8$  il y a 1107 ordres différents (plus une famille non dénombrable).



# Généralisation de la construction topologique de l'ordre

Soit  $S$  une surface hyperbolique à bord non-vide ; donc  $\tilde{S} \subset \mathbb{H}^2$ .  
Alors  $MCG(S)$  agit sur

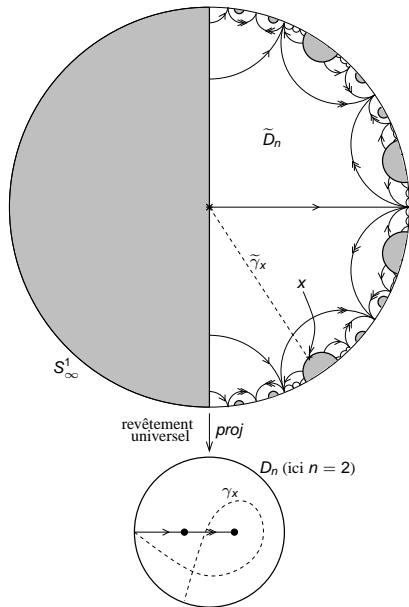
$$\partial\tilde{S} \setminus \{*\} \quad (\text{dans } \overline{\mathbb{H}^2}),$$

qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .

Pour toute orbite libre de cette action de  $MCG(S)$  sur  $\mathbb{R}$  on a un ordre (LO) de  $MCG(S)$ .

**Classification des tels ordres sur  $B_n$**   
dans [Short,Wiest].

**Exemple :** sur  $B_8$  il y a 1107 ordres différents (plus une famille non dénombrable).



# Un autre algorithme pour décider l'ordre

**Théorème** [Mosher] Soit  $S$  une surface compacte. Alors  $\mathcal{MCG}(S)$  est automatique.

Si  $\varphi \in \mathcal{MCG}(S)$ , donné par un mot de longueur  $\ell$ , alors sa forme normale automatique de Mosher est une suite

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_\lambda$$

de classes combinatoires de triangulations de  $S$ , où  $\lambda \leq C \cdot \ell$ .

**Théorème** [Rourke,Wiest] Soit  $S$  une surface à bord. Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{MCG}(S)$ , avec formes normales

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_\lambda, \quad \tilde{T}_1 \rightarrow \tilde{T}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{T}_{\tilde{\lambda}}$$

qui diffèrent à partir du  $i$ -ième terme. Alors on peut décider si  $\varphi < \psi$  ou  $\psi < \varphi$  en regardant

$$T_i, \dots, T_{i+4} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_i, \dots, \tilde{T}_{i+4}.$$

# Un autre algorithme pour décider l'ordre

**Théorème** [Mosher] Soit  $S$  une surface compacte. Alors  $\mathcal{MCG}(S)$  est automatique.

Si  $\varphi \in \mathcal{MCG}(S)$ , donné par un mot de longueur  $\ell$ , alors sa forme normale automatique de Mosher est une suite

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_\lambda$$

de classes combinatoires de triangulations de  $S$ , où  $\lambda \leq C \cdot \ell$ .

**Théorème** [Rourke,Wiest] Soit  $S$  une surface à bord. Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{MCG}(S)$ , avec formes normales

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_\lambda, \quad \tilde{T}_1 \rightarrow \tilde{T}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{T}_{\tilde{\lambda}}$$

qui diffèrent à partir du  $i$ -ième terme. Alors on peut décider si  $\varphi < \psi$  ou  $\psi < \varphi$  en regardant

$$T_i, \dots, T_{i+4} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_i, \dots, \tilde{T}_{i+4}.$$

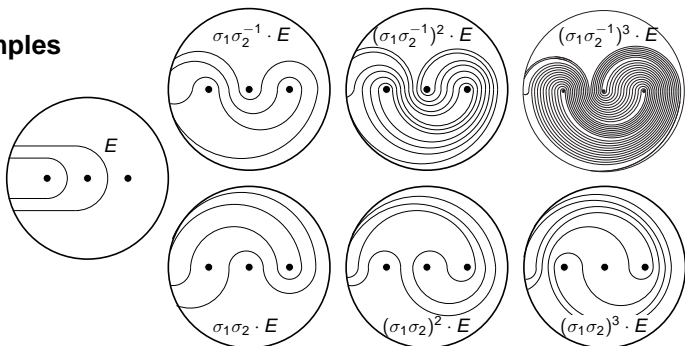


- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$**
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

# Complexité de diagrammes de courbes et la géométrie de l'espace de Teichmüller

**Définition** complexité( $\beta$ ) :=  $\#\{(\text{diagr. des courbes de } \beta) \cap \mathbb{R}\}$ .

**Exemples**

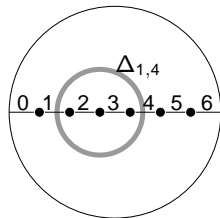


- complexité(mot aléatoire)  $\rightarrow \infty$  *exponentiellement*
- complexité( $T^n$ )  $\rightarrow \infty$  *linéairement* (où  $T$  = twist de Dehn)

# Une nouvelle métrique sur $B_n$

Considérons  $B_n$ , muni des générateurs

$\{\text{demi-twists de Dehn } \Delta_{i,j} \mid 0 \leq i < j \leq n\}$



**Définition** La  $\Delta$ -longueur d'un mot

$$w = \Delta_{*,*}^a \cdot \Delta_{*,*}^b \cdot \dots \cdot \Delta_{*,*}^z$$

est

$$\ell_{\Delta}(w) = \log(|a| + 1) + \dots + \log(|z| + 1)$$

Ceci induit une métrique  $d_{\Delta}$  sur  $B_n$  :

$d_{\Delta}(\beta_1, \beta_2) :=$  la  $\Delta$ -longueur minimale de mots représentant  $\beta_1^{-1} \beta_2$ .

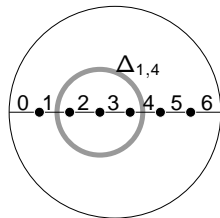
**Théorème** [Dynnikov-Wiest] Il y a une relation bilipschitz

$$\log(\text{complexité}(\beta)) \cong d_{\Delta}(\beta, 1)$$

# Une nouvelle métrique sur $B_n$

Considérons  $B_n$ , muni des générateurs

$\{\text{demi-twists de Dehn } \Delta_{i,j} \mid 0 \leq i < j \leq n\}$



**Définition** La  $\Delta$ -longueur d'un mot

$$w = \Delta_{*,*}^a \cdot \Delta_{*,*}^b \cdot \dots \cdot \Delta_{*,*}^z$$

est

$$\ell_{\Delta}(w) = \log(|a| + 1) + \dots + \log(|z| + 1)$$

Ceci induit une métrique  $d_{\Delta}$  sur  $B_n$  :

$d_{\Delta}(\beta_1, \beta_2) :=$  la  $\Delta$ -longueur minimale de mots représentant  $\beta_1^{-1} \beta_2$ .

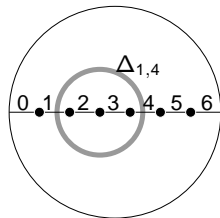
**Théorème** [Dynnikov-Wiest] Il y a une relation bilipschitz

$$\log(\text{complexité}(\beta)) \cong d_{\Delta}(\beta, 1)$$

# Une nouvelle métrique sur $B_n$

Considérons  $B_n$ , muni des générateurs

$\{\text{demi-twists de Dehn } \Delta_{i,j} \mid 0 \leq i < j \leq n\}$



**Définition** La  $\Delta$ -longueur d'un mot

$$w = \Delta_{*,*}^a \cdot \Delta_{*,*}^b \cdot \dots \cdot \Delta_{*,*}^z$$

est

$$\ell_{\Delta}(w) = \log(|a| + 1) + \dots + \log(|z| + 1)$$

Ceci induit une métrique  $d_{\Delta}$  sur  $B_n$  :

$d_{\Delta}(\beta_1, \beta_2) :=$  la  $\Delta$ -longueur minimale de mots représentant  $\beta_1^{-1} \beta_2$ .

**Théorème** [Dynnikov-Wiest] Il y a une relation bilipschitz

$$\log(\text{complexité}(\beta)) \cong d_{\Delta}(\beta, 1)$$

# La déformation de $B_n$ dans l'espace de Teichmüller

Considérons l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(D_n)$ , muni de la métrique de Teichmüller. L'action de  $B_n$  sur  $\mathcal{T}(D_n)$  induit un plongement

$$B_n \hookrightarrow \mathcal{T}(D_n), \quad \beta \mapsto \beta \cdot \tau_0$$

où  $\tau_0$  est une structure hyperbolique sans géodésiques courtes.

**Conjecture** Le plongement

$$(B_n, d_\Delta) \hookrightarrow (\mathcal{T}(D_n), d_{\text{Teichmüller}})$$

est quasi-isométrique.

Je suis optimiste que cette conjecture sera bientôt un théorème.

# La déformation de $B_n$ dans l'espace de Teichmüller

Considérons l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(D_n)$ , muni de la métrique de Teichmüller. L'action de  $B_n$  sur  $\mathcal{T}(D_n)$  induit un plongement

$$B_n \hookrightarrow \mathcal{T}(D_n), \quad \beta \mapsto \beta \cdot \tau_0$$

où  $\tau_0$  est une structure hyperbolique sans géodésiques courtes.

**Conjecture** Le plongement

$$(B_n, d_\Delta) \hookrightarrow (\mathcal{T}(D_n), d_{\text{Teichmüller}})$$

est quasi-isométrique.

Je suis optimiste que cette conjecture sera bientôt un théorème.

# La déformation de $B_n$ dans l'espace de Teichmüller

Considérons l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(D_n)$ , muni de la métrique de Teichmüller. L'action de  $B_n$  sur  $\mathcal{T}(D_n)$  induit un plongement

$$B_n \hookrightarrow \mathcal{T}(D_n), \quad \beta \mapsto \beta \cdot \tau_0$$

où  $\tau_0$  est une structure hyperbolique sans géodésiques courtes.

**Conjecture** Le plongement

$$(B_n, d_\Delta) \hookrightarrow (\mathcal{T}(D_n), d_{\text{Teichmüller}})$$

est quasi-isométrique.

Je suis optimiste que cette conjecture sera bientôt un théorème.



- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses**
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes

# Plats dans le groupe des tresses

**Problème** Pour  $\beta \in B_n$ , déterminer son centralisateur

$$C(\beta) = \{\gamma \in B_n \mid \gamma\beta = \beta\gamma\}$$

- Si  $\beta$  périodique : réponse relativement facile.
- Si  $\beta$  pseudo-Anosov : réponse relativement facile.  
Exemple : si  $\beta$  “générique”,  $C(\beta) = \langle \beta, \Delta^2 \rangle$ .
- Si  $\beta$  réductible, alors toute tresse de  $C(\beta)$  doit respecter la structure des “cercles de réduction” de  $\beta$

# Plats dans le groupe des tresses

**Problème** Pour  $\beta \in B_n$ , déterminer son centralisateur

$$C(\beta) = \{\gamma \in B_n \mid \gamma\beta = \beta\gamma\}$$

- Si  $\beta$  périodique : réponse relativement facile.
- Si  $\beta$  pseudo-Anosov : réponse relativement facile.  
Exemple : si  $\beta$  “générique”,  $C(\beta) = \langle \beta, \Delta^2 \rangle$ .
- Si  $\beta$  réductible, alors toute tresse de  $C(\beta)$  doit respecter la structure des “cercles de réduction” de  $\beta$

# Plats dans le groupe des tresses

**Problème** Pour  $\beta \in B_n$ , déterminer son centralisateur

$$C(\beta) = \{\gamma \in B_n \mid \gamma\beta = \beta\gamma\}$$

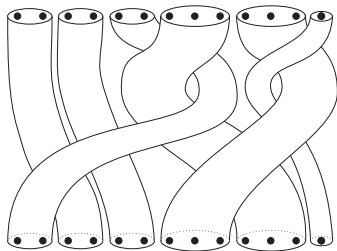
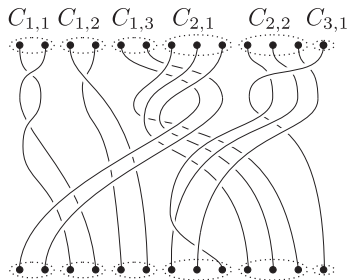
- Si  $\beta$  périodique : réponse relativement facile.
- Si  $\beta$  pseudo-Anosov : réponse relativement facile.  
Exemple : si  $\beta$  “générique”,  $C(\beta) = \langle \beta, \Delta^2 \rangle$ .
- Si  $\beta$  réductible, alors toute tresse de  $C(\beta)$  doit respecter la structure des “cercles de réduction” de  $\beta$

# Plats dans le groupe des tresses

**Problème** Pour  $\beta \in B_n$ , déterminer son centralisateur

$$C(\beta) = \{\gamma \in B_n \mid \gamma\beta = \beta\gamma\}$$

- Si  $\beta$  périodique : réponse relativement facile.
- Si  $\beta$  pseudo-Anosov : réponse relativement facile.  
Exemple : si  $\beta$  "générique",  $C(\beta) = \langle \beta, \Delta^2 \rangle$ .
- Si  $\beta$  réductible, alors toute tresse de  $C(\beta)$  doit respecter la structure des "cercles de réduction" de  $\beta$



**Théorème** [Gonzalez-Meneses, Wiest] (a) Description complète de la structure de  $C(\beta)$  pour toute tresse  $\beta \in B_n$ .

(b) Création *algorithmique* d'un système de générateurs de  $C(\beta)$  avec  $\leq O(n^2)$  éléments (indépendant de longueur( $\beta$ )).

**Remarque** On a parfois besoin de  $O(n^2)$  générateurs. Exemple :

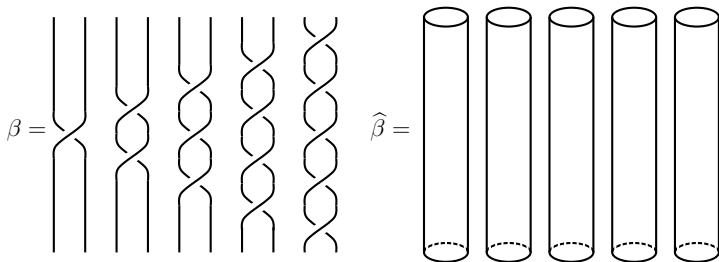
**Q1** Le plongement  $C(\beta) \hookrightarrow B_n$ , est-il quasi-isométrique ?

**Q2** Généralisations pour  $\mathcal{MCG}(S)$  ?

**Théorème** [Gonzalez-Meneses, Wiest] (a) Description complète de la structure de  $C(\beta)$  pour toute tresse  $\beta \in B_n$ .

(b) Création *algorithmique* d'un système de générateurs de  $C(\beta)$  avec  $\leq O(n^2)$  éléments (indépendant de longueur( $\beta$ )).

**Remarque** On a parfois besoin de  $O(n^2)$  générateurs. Exemple :



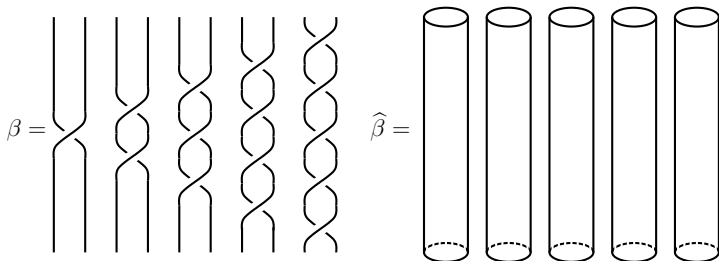
**Q1** Le plongement  $C(\beta) \hookrightarrow B_n$ , est-il quasi-isométrique ?

**Q2** Généralisations pour  $\mathcal{MCG}(S)$  ?

**Théorème** [Gonzalez-Meneses, Wiest] (a) Description complète de la structure de  $C(\beta)$  pour toute tresse  $\beta \in B_n$ .

(b) Création *algorithmique* d'un système de générateurs de  $C(\beta)$  avec  $\leq O(n^2)$  éléments (indépendant de longueur( $\beta$ )).

**Remarque** On a parfois besoin de  $O(n^2)$  générateurs. Exemple :



**Q1** Le plongement  $C(\beta) \hookrightarrow B_n$ , est-il quasi-isométrique ?

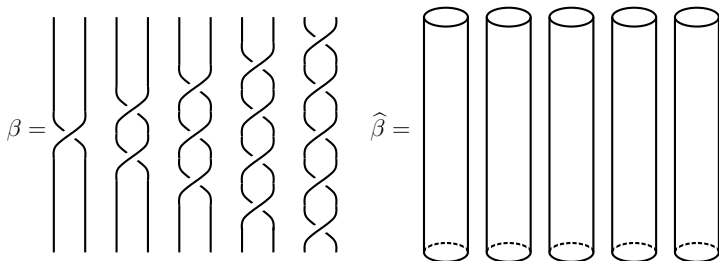
**Q2** Généralisations pour  $\mathcal{MCG}(S)$  ?



**Théorème** [Gonzalez-Meneses, Wiest] (a) Description complète de la structure de  $C(\beta)$  pour toute tresse  $\beta \in B_n$ .

(b) Création *algorithmique* d'un système de générateurs de  $C(\beta)$  avec  $\leq O(n^2)$  éléments (indépendant de longueur( $\beta$ )).

**Remarque** On a parfois besoin de  $O(n^2)$  générateurs. Exemple :



**Q1** Le plongement  $C(\beta) \hookrightarrow B_n$ , est-il quasi-isométrique ?

**Q2** Généralisations pour  $\mathcal{MCG}(S)$  ?

- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $\text{Diff}^+(D^2)$**
- 6 Groupes de diagrammes

# Sous-groupes remarquables de $B_n$ et $\text{Diffeo}^+(D^2)$

**Définition** Un *groupe d'Artin à angles droits* (RAAG) est de la forme

$$A = \langle a_1, \dots, a_n \mid \text{des relations de commutation entre générateurs} \rangle$$

**Construction** [Crisp,W] Beaucoup d'exemples de plongements q.i.

$$G_{\text{hyp}} \rightarrow A, \quad \text{où } G_{\text{hyp}} \text{ est } \delta\text{-hyperbolique, et } A \text{ est un RAAG.}$$

Par exemple,  $G_{\text{hyp}} = \pi_1(S)$ , où  $S$  une surface  $\neq \mathbb{RP}^2$ ,  $B_{\text{Klein}}$ ,  $\#_3 \mathbb{RP}^2$ .

**Question** Existe-t-il un groupe hyperbolique  $G$  avec  $\partial G =$  la courbe de Menger tel que  $G \hookrightarrow \text{RAAG}$  ?

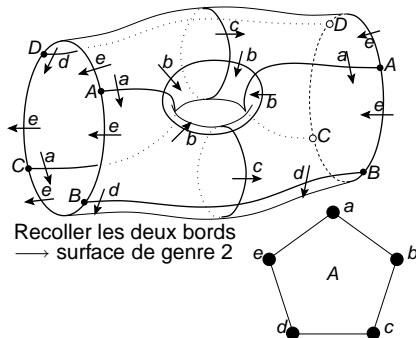
# Sous-groupes remarquables de $B_n$ et $\text{Diffeo}^+(D^2)$

**Définition** Un groupe d'Artin à angles droits (RAAG) est de la forme

$$A = \langle a_1, \dots, a_n \mid \text{des relations de commutation entre générateurs} \rangle$$

**Construction** [Crisp,W] Beaucoup d'exemples de plongements q.i.

$G_{\text{hyp}} \rightarrow A$ , où  $G_{\text{hyp}}$  est  $\delta$ -hyperbolique, et  $A$  est un RAAG.



Par exemple,  $G_{\text{hyp}} = \pi_1(S)$ , où  $S$  une surface  $\neq \mathbb{RP}^2$ , BKlein,  $\#_3 \mathbb{RP}^2$ .

**Question** Existe-t-il un groupe hyperbolique  $G$  avec  $\partial G =$  la courbe de Menger tel que  $G \hookrightarrow \text{RAAG}$  ?

## Théorème [Crisp-Wiest]

(a) Pour tout RAAG  $A$ , il existe une surface  $S$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et un plongement q.i.

$$A \xrightarrow{\text{q.i.}} PB_n(S)$$

(b) Pour “beaucoup” de RAAGs  $A$ , il existe même  $n \in \mathbb{N}$  et des plongements q.i.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{q.i.}} & \text{Diffeo}(D^2, \partial D^2 \cup n \text{ points}, d_{L^2}) \\ & \searrow \text{q.i.} & \downarrow \text{proj} \\ & & PB_n \end{array}$$

### **Théorème** [Crisp-Wiest]

**(a)** Pour tout RAAG  $A$ , il existe une surface  $S$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et un plongement q.i.

$$A \xrightarrow{q.i.} PB_n(S)$$

**(b)** Pour “beaucoup” de RAAGs  $A$ , il existe même  $n \in \mathbb{N}$  et des plongements q.i.

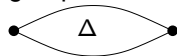
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q.i.} & \text{Diffeo}(D^2, \partial D^2 \cup n \text{ points}, d_{L^2}) \\ & \searrow q.i. & \downarrow \text{proj} \\ & & PB_n \end{array}$$

- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes**

# Groupes de diagrammes

## Exemple d'un groupe de diagrammes

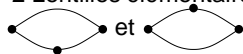
Le groupe  $F$  de Thompson =  
groupe de remplissages de la lentille  $\Delta$



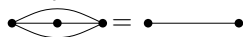
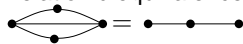
avec des "lentilles

élémentaires"

2 Lentilles élémentaires :



relation d'équivalence :



Élément typique :



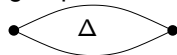
**"Definition"** Un *groupe de diagrammes* est comme  $F$ , sauf on permet d'autres "lentilles élémentaires" et une autre "grande lentille". Par exemple



# Groupes de diagrammes

## Exemple d'un groupe de diagrammes

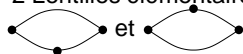
Le groupe  $F$  de Thompson =  
groupe de remplissages de la lentille  $\Delta$



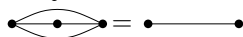
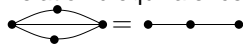
avec des "lentilles

élémentaires"

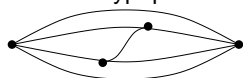
2 Lentilles élémentaires :



relation d'équivalence :



Élément typique :

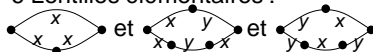


**"Définition"** Un *groupe de diagrammes* est comme  $F$ , sauf on permet d'autres "lentilles élémentaires" et une autre "grande lentille". Par exemple

Grande lentille  $\Delta$  :



6 Lentilles élémentaires :



et leurs images miroirs  $\updownarrow$

# Les groupes de diagrammes sont ordonnables

**Théorème [Wiest,2002]** *Les groupes des diagrammes sont ordonnables à gauche, car ils se plongent dans un certain groupe de tresses à une infinité de brins.*

**Théorème [Guba, Sapir, 2002]** *Les groupes des diagrammes sont bi-ordonnables, car ils se plongent dans un certain groupe de diagrammes “universel”, qui est bi-ordonnable.*

# Les groupes de diagrammes sont ordonnables

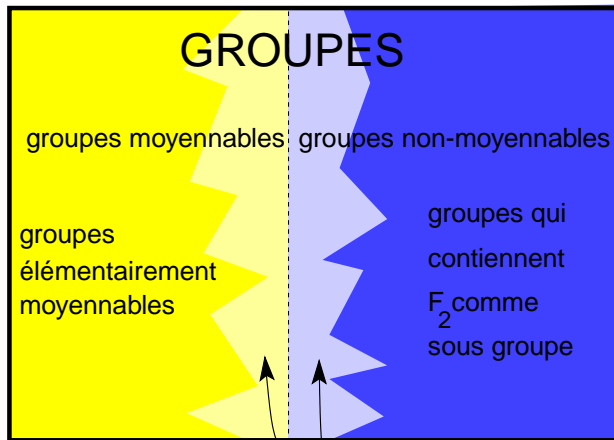
**Théorème [Wiest,2002]** *Les groupes des diagrammes sont ordonnables à gauche, car ils se plongent dans un certain groupe de tresses à une infinité de brins.*

**Théorème [Guba, Sapir, 2002]** *Les groupes des diagrammes sont bi-ordonnables, car ils se plongent dans un certain groupe de diagrammes “universel”, qui est bi-ordonnable.*

# Le groupe $F$ de Thompson est-il moyennable ?

# Le groupe $F$ de Thompson est-il moyennable ?

Pourquoi la question est intéressante :



On sait que le groupe  $F$   
habite ici —————  
ou ici —————

# $F$ moyennable ?

## Approche Monte Carlo [Burillo, Cleary, W]

Soit  $G$  un groupe, avec présentation finie. Pour  $L \in \mathbb{N}$ , soit

$p_L =$  proportion des mots de longueur  $L$  qui représentent  $1_G$ .

**Théorème [Kesten]**

$G$  non-moyennable  $\iff p_L$  décroît exponentiellement

$G$  moyennable  $\iff p_L$  décroît plus lentement que toute exponentielle.

# $F$ moyennable ?

## Approche Monte Carlo [Burillo, Cleary, W]

Soit  $G$  un groupe, avec présentation finie. Pour  $L \in \mathbb{N}$ , soit

$p_L =$  proportion des mots de longueur  $L$  qui représentent  $1_G$ .

**Théorème** [Kesten]

$G$  non-moyennable  $\iff p_L$  décroît exponentiellement

$G$  moyennable  $\iff p_L$  décroît plus lentement que toute exponentielle.

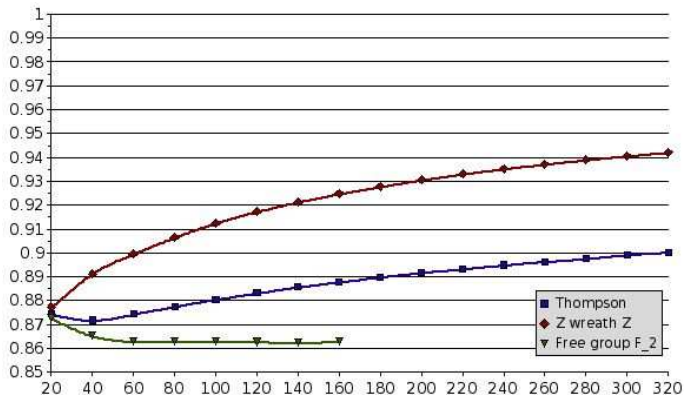
# Résultats expérimentaux : $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ vs. $F$ vs. $F_2$

Le graphe rouge ( $\sqrt[p]{pL}$  pour  $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ ) tend vers 1.

Le graphe bleu (pour  $F$ ) tend vers une limite  $\ell$ .

$$\ell = 1 \iff F \text{ moyennable}$$

$$\ell < 1 \iff F \text{ non-moyennable}$$

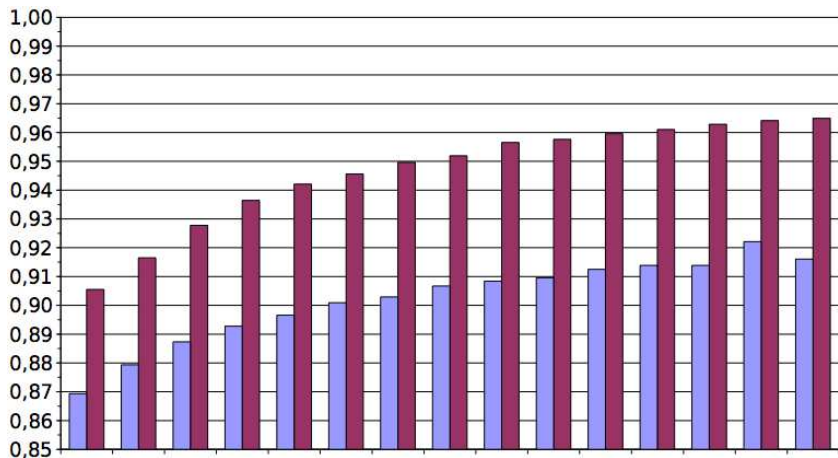




# Résultats expérimentaux : $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ vs. $F$

$\text{limite}_{\text{bleue}} = 1 \iff F$  moyennable

$\text{limite}_{\text{bleue}} < 1 \iff F$  non-moyennable



# Un rêve : démo que $F$ est non-moyennable

Un autre critère de moyennabilité :

**Théorème** [Tarski] Un groupe  $G$  est

non-moyennable  $\iff G$  admet une décomposition paradoxale

**Idée** Utiliser le plongement du groupe de Thompson  $F$  dans un groupe de tresses  $B_\infty$  pour construire une décomposition paradoxale de  $F$ .

# Je n'ai pas eu le temps de parler de...

- Ordonnabilité des  $\pi_1(M^3)$  [Boyer, Rolfsen, Wiest]
- Quasi-isométries d'espaces métriques  $X \stackrel{q.i.}{=} \text{arbre} \times \mathbb{R}^n$   
[Souche, Wiest]

# Je n'ai pas eu le temps de parler de...

- Ordonnabilité des  $\pi_1(M^3)$  [Boyer, Rolfsen, Wiest]
- Quasi-isométries d'espaces métriques  $X \stackrel{q.i.}{=} \text{arbre} \times \mathbb{R}^n$   
[Souche, Wiest]

- 1 Notions de base : ordres, tresses
- 2 Ordres sur les groupes des tresses
- 3 Complexité de diagrammes de courbes et géométrie de  $\mathcal{T}$
- 4 Plats dans le groupe des tresses
- 5 Sous-groupes remarquables de  $B_n$  et  $Diff^+(D^2)$
- 6 Groupes de diagrammes