

Remerciements

Je tiens à remercier les nombreux collègues et amis que j'ai pu rencontrer pendant mon parcours scientifique :

J'exprime ma gratitude à Colin Rourke (Warwick), Hamish Short (Marseille), et Dale Rolfsen (Vancouver), qui ont encadré ma thèse et mes deux post-docs, respectivement. Avec patience et générosité ils ont partagé leur savoir, et m'ont accueilli très chaleureusement.

Une grande part de la joie que me procure les mathématiques réside dans la discussion, et le travail avec des amis. J'ai eu la grande chance que toutes mes collaborations se sont passées dans une ambiance chaleureuse de respect, bonne humeur, et d'amitié. Je suis très heureux de témoigner ma reconnaissance à mes co-auteurs Rosa Antolini, Steve Boyer, José Burillo, Sean Cleary, John Crisp, Patrick Dehornoy, Ivan Dynnikov, Roger Fenn, Michael T. Greene, Juan González-Meneses, Colin Rourke, Dale Rolfsen, Hamish Short, et Estelle Souche.

De même, je sais gré à toutes les personnes avec lesquelles j'ai pu discuter des mathématiques. Aaron Abrams, Jason Behrstock, Michel Boileau, John Guaschi, Mustafa Korkmaz, Samuel Lelièvre, Jérôme Los, Lee Mosher, Luis Paris, Brian Sanderson, et tant d'autres – merci !

Le GDR 2105 du CNRS "Tresses et topologie de basse dimension" et l'ACI "Jeunes chercheurs" JC1041 "Structures géométriques en théorie des groupes et topologie" m'ont aidé à établir des contacts très enrichissants. À ses organisateurs et participants, j'exprime mes remerciements.

Aux collègues de l'IRMAR – permanents et doctorants – qui aident à créer une bonne ambiance de travail, et tout particulièrement à Mark Baker, j'exprime ma reconnaissance.

À tous ceux qui me sont proches, je leur redis mon profond attachement.

Résumé

Ce document de synthèse contient un panorama de certains aspects des groupes des tresses B_n , notamment des propriétés liées à leur caractère ordonnable à gauche.

Nous présentons plusieurs façons de construire des ordres sur B_n , classifions les ordres ainsi obtenus, et étudions leurs propriétés. Nous discutons plusieurs algorithmes efficaces pour décider l'ordre; en revanche, nous montrons comment le manque de compréhension actuel des propriétés quasi-isométriques des groupes des tresses limite aussi nos connaissances sur l'algorithmique des ordres. Nous présentons un nouvel outil pour l'étude de ce type de problèmes, à savoir une nouvelle métrique sur B_n qui possède des propriétés géométriques remarquables.

Nous étudions aussi plusieurs classes de groupes en les plongeant dans des groupes de tresses et des groupes de difféomorphismes du plan – notamment, les groupes de diagrammes, et les groupes d'Artin à angles droits et leurs sous-groupes.

Dans le même ordre d'idées, nous calculons le centralisateur de tout élément du groupe de tresses, nous classifions les quasi-isométries du groupe B_3 , et nous étudions l'ordonnabilité des groupes fondamentaux de 2- et de 3-variétés.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Notions de base | 5 |
| 1.1 | Groupes des tresses et leurs généralisations | 5 |
| 1.2 | Groupes ordonnables | 8 |
| 1.3 | Quasi-isométries | 10 |
| 2 | Définitions d'ordres sur les groupes de tresses | 11 |
| 3 | Algorithmes pour décider l'ordre | 19 |
| 3.1 | Algorithmes topologiques | 19 |
| 3.2 | Algorithme de réduction des poignées | 22 |
| 4 | Quasi-géodésiques dans le groupe des tresses, et une nouvelle métrique pour Γ_{B_n} | 24 |
| 4.1 | Retournements de mots | 25 |
| 4.2 | Relaxation de diagrammes de courbes, et une nouvelle métrique sur Γ_{B_n} | 27 |
| 4.3 | Questions ouvertes | 32 |
| 5 | Groupes de tresses, ordres, et groupes de diagrammes | 33 |
| 5.1 | Groupes de diagrammes | 33 |
| 5.2 | Plongement de groupes de diagrammes dans un groupe de tresses | 36 |
| 5.3 | (Non-)moyennabilité du groupe de R. Thompson | 37 |
| 6 | Plats dans le groupe des tresses | 38 |
| 6.1 | Exemples et résultats simples | 41 |
| 6.2 | Le cas périodique | 42 |
| 6.3 | Le cas pseudo-Anosov | 44 |
| 6.4 | Le cas réductible | 45 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 7 | Groupes d'Artin à angles droits et groupes hyperboliques dans des groupes de tresses | 49 |
| 7.1 | Définitions | 50 |
| 7.2 | Plongements dans des groupes d'Artin à angles droits | 51 |
| 7.3 | Plongements de groupes d'Artin à angles droits dans PB_m et $\text{Diff}(D^2, \partial D^2, \text{vol})$ | 53 |
| 8 | Quasi-isométries de B_3 | 55 |
| 9 | Ordonnabilité des groupes fondamentaux de variétés | 56 |
| 9.1 | Groupes de surfaces | 57 |
| 9.2 | Groupes de 3-variétés | 57 |

1 Notions de base

Dans ce premier chapitre, nous rappelons quelques notions importantes dont nous aurons besoin, et fixons des notations.

1.1 Groupes des tresses et leurs généralisations

Le *groupe des tresses* à n brins, noté B_n , est donné par la présentation

$$B_n \cong \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n - 2 \end{array} \rangle$$

Le *monoïde des tresses positives* B_n^+ est le monoïde défini par la même présentation. Par un théorème de Garside [60] l'application naturelle $B_n^+ \rightarrow B_n$ est injective.

Géométriquement, un mot de tresse correspond à un diagramme de tresse verticale, où les lettres qui apparaissent à la fin du mot correspondent aux croisements “en haut” du diagramme, et les lettres σ_1 correspondent aux croisements “à gauche” dans le diagramme. La figure 1 devrait clarifier cette convention. Attention, les articles [55, 117, 41, 44] etc. n'utilisent pas tous cette convention.

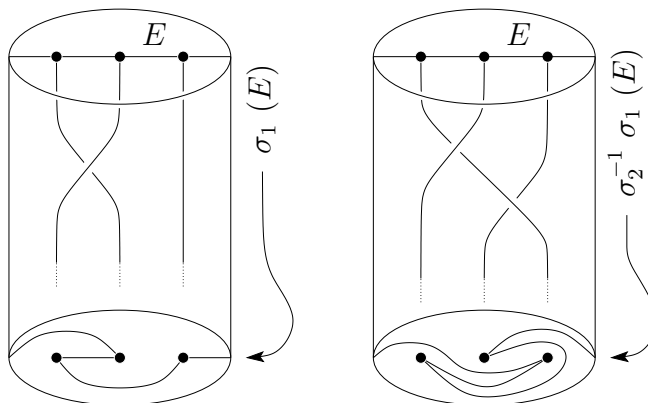


FIG. 1 – Les tresses σ_1 et $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ et leurs diagrammes de courbes.

Une généralisation très importante des groupes des tresses sont des *groupes d'homéotopies*. Le groupe d'homéotopies d'une surface S est le groupe d'homéomorphismes $S \rightarrow S$ (préservant une éventuelle orientation de S), à isotopie près, ou bien à homotopie près – en effet, par un théorème de Epstein [48], deux homéomorphismes d'une surface sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes. Nous allons noter ce groupe $\mathcal{MCG}(S)$, d'après l'anglais “mapping class group”.

Si la surface S est à bord non-vide, alors dans la définition du groupe d'homéotopies, les homéomorphismes et isotopies sont censés fixer le bord point par point. Si, en revanche, la surface est muni de "points distingués", alors les homéomorphismes et isotopies doivent préserver l'ensemble des points distingués, mais on n'exige pas qu'il s'agisse de l'application identité sur cet ensemble.

Il est bien connu et assez facile à démontrer (voir, par exemple, [11]) que le groupe des tresses est isomorphe au groupe d'homéotopies de D_n , où D_n note le disque fermé muni de n points distingués dans son intérieur.

Une excellente aide à la visualisation d'homéomorphismes d'une surface S , ainsi que d'éléments du groupe $\mathcal{MCG}(S)$, sont les *diagrammes de courbes*. Soit E une collection d'arcs proprement plongés dans la surface (où les points terminaux des arcs peuvent se situer sur les points distingués) qui sont disjoints (sauf éventuellement dans les points distingués). Supposons en plus que la collection d'arcs E découpe le S en morceaux triviaux, dans le sens que toutes les composantes de $S \setminus E$ sont contractiles et contiennent au plus un point distingué dans leur intérieur.

Typiquement, D_n est le disque de rayon 1 dans le plan complexe, dont les points distingués sont alignés sur la droite réelle, et E est le diagramme constitué de $n + 1$ arcs qui sont des intervalles dans la droite réelle (voir figure 1). Un autre exemple important sera le diagramme avec $n - 1$ arcs disjoints, dont chacun lie un point sur ∂D_n dans le demi-plan supérieur avec un point du demi-plan inférieur, de telle façon que chaque composante de $D_n \setminus E$ contienne exactement un point distingué (voir figure 9).

Le *diagramme de courbes* d'un élément β de $\mathcal{MCG}(S)$ est la classe d'isotopie du diagramme $\beta(E)$. On remarque que l'élément β est uniquement déterminé par son diagramme de courbes. Figure 1 contient des exemples de diagrammes de courbes.

Si on a deux diagrammes de courbes, et on souhaite les comparer, il convient de pouvoir les dessiner non pas de façon canonique (car ils ne sont définis qu'à isotopie près), mais au moins dans une position *relative* canonique. Pour cela, il suffit d'appliquer des isotopies aux deux diagrammes pour éliminer successivement des *bigones*, c'est-à-dire des disques ne contenant pas de points distingués et bornés par exactement deux arcs, un de chaque diagramme. (Une façon théoriquement nette, mais pas pratique, de le faire est de munir la surface, privé des points distingués, d'une structure hyperbolique, et de remplacer les arcs par des arcs géodésiques.) On peut démontrer que cette position relative des diagrammes est unique, à isotopie de D_n près.

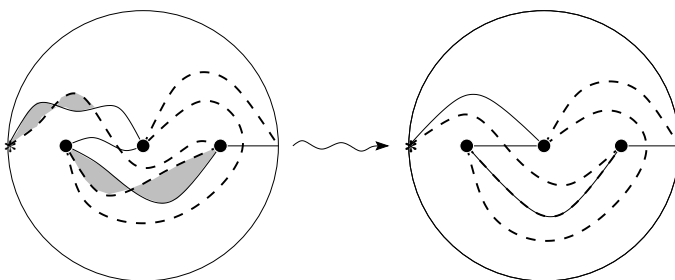


FIG. 2 – Étant donnés deux diagrammes de courbes, on peut les mettre en position relative réduite.

Soit dit en passant qu'il existe aussi une notion de groupes de tresses dans des surfaces S pour S autre que le disque – essentiellement, il s'agit du groupe des classes d'isotopies de n brins dans $S \times [0, 1]$. Or, sauf dans les cas dégénérés de la sphère et du tore, ceci est juste le noyau de l'homomorphisme naturel

$$\mathcal{MCG}(S, n \text{ points}) \rightarrow \mathcal{MCG}(S).$$

Nous ne parlerons plus de ce groupe, sauf pour remarquer qu'il reste des problèmes ouverts très intéressants le concernant. Notamment, on ne sait pas s'il est automatique – ceci est autant plus remarquable que son surgroupe $\mathcal{MCG}(S)$ est automatique [97], voire bi-automatique [76].

Jusqu'ici, nous avons vu des généralisations des groupes de tresses qui prennent l'interprétation géométrique de B_n comme leur point de départ. Nous allons maintenant étudier une classe de groupes qui partage avec B_n des propriétés algébriques (qui ont notamment des présentations de la même forme) et algorithmiques. Il s'agit des *groupes d'Artin-Tits* et, plus généralement, des *groupes de Garside*.

Pour rappeler la définition de cette classe de groupes, nous mentionnons d'abord qu'un *groupe de Coxeter fini* est un sous-groupe de $GL_m(\mathbb{R})$ qui est engendré par des réflexions dans des hyperplans, et qui en plus est fini. Si W est un tel groupe de réflexions fini, on lui associe un *groupe d'Artin-Tits de type fini*, qu'on notera A , de la façon suivante : on considère l'extension naturelle de l'action de W sur \mathbb{R}^m vers une action sur \mathbb{C}^m par complexification. Si $H \subset \mathbb{C}^m$ est l'ensemble des points qui sont fixes par l'action d'au moins un élément de W (donc H est une réunion d'hyperplans complexes), alors

$$A = \pi_1((\mathbb{C}^m \setminus H)/W).$$

Il se trouve que les groupes de Coxeter finis ont une structure très particulière : ils ont une présentation avec un ensemble fini S de générateurs, qui sont tous

soumis à la relation $s_i^2 = 1$, et des relations supplémentaires qui sont tous de la forme $s_i s_j s_i \dots = s_j s_i s_i \dots$, avec le même nombre de générateurs à droite et à gauche. Le groupe d'Artin-Tits correspondant est alors obtenu en enlevant les relations d'idempotence.

Bien évidemment, pas tous les groupes d'une telle présentation sont des groupes d'Artin *de type fini*. Pour des explications beaucoup plus détaillées, et une classification complète des groupes d'Artin-Tits, on peut consulter, par exemple, [32].

Une des raisons pourquoi les groupes de cette classe sont très étudiés sont leurs propriétés géométriques très subtiles. Par exemple, il est un problème ouvert (même dans le cas des groupes de tresses) s'ils sont $CAT(0)$.

Une autre raison est qu'ils ont des propriétés algorithmiques agréables, mais pas triviales. En effet, ils portent une structure automatique qui permet de résoudre le problème des mots en temps quadratique, et le problème de conjugaison en temps fini. Cette structure a été découverte par Garside [60] dans le cas spécial des groupes de tresses. Aujourd'hui il y a une large famille de groupes, décrits par P. Dehornoy [39], sur lesquels les méthodes de Garside peuvent être adaptés, qui s'appellent les *groupes de Garside*. Ces groupes sont par définition des groupes de fractions de monoïdes des Garside, où un monoïde de Garside est un monoïde engendré par ses éléments indivisibles, dont il y a un nombre fini, et muni d'un élément Δ , tel que l'ensemble des diviseurs de Δ à droite coïncide avec celui à gauche, est fini, et engendre le monoïde. En plus, on exige certaines conditions techniques, notamment annulation à droite et à gauche, et l'existence du ppcm et pgcd de deux éléments arbitraires.

Le langage automatique dans un groupe de Garside exprime tout élément de façon canonique comme un produit de diviseurs de Δ . L'idée à la base est que la définition est faite pour permettre de généraliser, de façon contrôlée, la notion de *retournement de mots* dans le groupe des tresses B_n . Un retournement est un remplacement d'un sous-mot positif-négatif par un sous-mot négatif-positif, ou le contraire, comme par exemple $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \rightarrow \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1$. Définitions et explications complètes se trouvent dans l'article [39].

1.2 Groupes ordonnables

Dans la suite, nous rappelons des définitions qui donnent des propriétés plus fortes que la propriété d'être sans torsion.

Definition 1.1 *Un groupe G est ordonnable à gauche s'il existe un ordre total $<$ sur G qui est invariant par multiplication à gauche ; c'est-à-dire que, si g, h et k sont trois éléments de G tels que $g < h$, alors $kg < kh$.*

Un groupe G est bi-ordonnable ou simplement ordonnable s'il existe un ordre total $<$ sur G qui est invariant par multiplication à gauche et aussi à droite.

On peut mentionner qu'il existe même une propriété encore intermédiaire aux deux types d'ordonnabilité, qui s'appelle l'indicabilité locale, mais nous n'allons pas la discuter. On a donc une suite d'implications

bi-ordonnable \Rightarrow loc. indicable \Rightarrow ordonnable à gauche \Rightarrow sans torsion.

La référence standard sur ce thème est l'ouvrage de Botto Mura et Rehmtulla [13].

Une indication que les définitions précédentes sont intéressantes vient du fait que, au moins dans le cas des groupes de type fini, elles se caractérisent en termes d'action du groupe sur la droite réelle par homéomorphisme. Effectivement, un groupe qui est engendré par un nombre fini d'éléments est ordonnable à gauche si et seulement s'il admet une représentation fidèle dans $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Si, dans la propriété précédente, on interdit tous les homéomorphismes de \mathbb{R} dont le graphe a des points au-dessus *et* au-dessous de la diagonale, on obtient exactement l'ensemble des groupes *bi-ordonnables* (de type fini). Si l'on est encore un peu plus exigeant, et on interdit tous les homéomorphismes dont le graphe intersecte la diagonale, alors il n'y a que les groupes \mathbb{Z}^m ($m \in \mathbb{N}$) qui restent.

La question quels groupes agissent, avec quelles propriétés de différentiabilité, sur quels espaces de Banach, est, bien évidemment, très importante. Dans cette optique, nous citons une question ouverte très intéressante [5] : existe-t-il un groupe ordonnable à gauche ayant la propriété (T) de Kazhdan ? Il semble que la propriété (T) est une obstruction à l'ordonnabilité ; par exemple, on sait que tout sous-groupe de B_n ne satisfait pas (T). En plus, par un théorème de Ghys, Burger et Navas [104], tout sous-groupe (infini, de type fini) de $\text{Diff}^+(\mathbb{R})$, et même de $\text{Diff}^+(S^1)$, n'a pas la propriété (T).

Pour d'autres motivations pour l'étude de l'ordonnabilité de groupes, on pourra consulter l'introduction de l'article [14]. À titre d'exemple, des groupes bi-ordonnables ont des racines uniques (c'est-à-dire, si G est bi-ordonnable et $\alpha, \beta \in G$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $\alpha^k = \beta^k$, alors $\alpha = \beta$).

Nous aurons également besoin de la définition suivante.

Definition 1.2 L'ordre sur un groupe ordonné $(G, <)$ est discret si pour tout élément g de G il existe un plus petit élément plus grand que g . Il est dense si pour tout élément g de G et tout h plus grand que g il existe un élément strictement entre g et h .

Il est très facile à démontrer que si $(G, <)$ est un groupe muni d'un ordre invariant à gauche, alors $<$ est ou bien discret, ou bien dense. En revanche, nous verrons des exemples de groupes qui peuvent être munis de deux ordres distincts, l'un discret, et l'autre dense – en fait, les groupes qui serviront d'exemple seront les groupes de tresses B_n pour $n \geq 3$.

1.3 Quasi-isométries

Nous définissons maintenant la notion de plongement quasi-isométrique, qui sera utilisée dans différentes parties. Rappelons que cette définition ou notion est à la base de toute la théorie de géométrie à large échelle ("large scale geometry" en anglais).

Definition 1.3 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f: X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est un plongement quasi-isométrique s'il existe deux constantes $C \geq 0$ et $\lambda \geq 1$ telles que pour tout couple (x_1, x_2) de points dans X on a

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + C.$$

On dit que f est une quasi-isométrie s'il est un plongement quasi-isométrique, et s'il existe un plongement q.i. $g: Y \rightarrow X$ tel que $g \circ f: X \rightarrow X$ et $f \circ g: Y \rightarrow Y$ sont uniformément proches des applications identité :

$$\exists D > 0, \quad \forall x \in X, d_X(x, g(f(x))) < D, \quad \forall y \in Y, d_Y(y, f(g(y))) < D.$$

On pourrait dire qu'en quasi-géométrie, on regarde les applications à distorsion bilipschitziennes et à discontinuités uniformément bornées près. Une autre définition dont on se servira est la notion d'espace à courbure non-positive suivante :

Definition 1.4 On dit qu'un espace métrique géodésique (X, d) est $CAT(0)$ si tout triangle géodésique Δ dans X est au plus aussi gros qu'un triangle de comparaison Δ' dans \mathbb{R}^2 . Plus exactement, on exige que, si Δ est un triangle géodésique en X , et si $f: \Delta \rightarrow \Delta'$ est une application vers un triangle Δ'

dans \mathbb{R}^2 qui, restreint à chacune des trois arêtes de Δ , est isométrique, alors l'application f doit être contractante.

On dit qu'un groupe est $CAT(0)$ s'il agit par isométries de façon cocompacte et propre sur un espace métrique $CAT(0)$.

Plutôt qu'essayer de donner une idée de la portée de ces deux définitions, qui est énorme, nous dirigeons le lecteur vers l'ouvrage [15].

Il est à noter qu'une des questions les plus importantes concernant les groupes de tresses, à savoir : sont-ils $CAT(0)$, est encore ouverte.

2 Définitions d'ordres sur les groupes de tresses

Le théorème suivant est dû à Dehornoy [35].

Théorème 2.1 *Il existe un ordre total $>$ sur le groupe des tresses B_n qui*

- est invariant à gauche ;*
- étend l'ordre des sous-mots de Garside, c'est-à-dire, si β_1, β_2 sont deux tresses et α appartient au monoïde des tresses positives B_n^+ , alors on a $\beta_1\beta_2 < \beta_1\alpha\beta_2$;*
- est discrète – plus exactement, la plus petite tresse plus grande que β est $\beta\sigma_{n-1}$.*

Nous verrons plus tard qu'il y a d'autres ordres sur B_n qui satisfont les deux premières conditions, mais qui sont denses.

Il est assez facile à déduire de ces trois propriétés que l'ordre de Dehornoy, restreint au monoïde des tresses positives B_n^+ , est un bon-ordre (c'est-à-dire, toute suite décroissante devient constante à partir d'un certain rang). Nous reviendrons plus tard sur ce bon-ordre, qui reste jusqu'à présent très mystérieux.

Voici donc la définition de Dehornoy de l'ordre $>$. On dit qu'un mot de tresse est σ_i -positif s'il contient les lettres $\sigma_i, \sigma_{i+1}^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, avec au moins une occurrence de la lettre σ_i (mais aucune occurrence de σ_i^{-1} !). Un mot de tresse est σ -positif s'il existe un indice i (entre 1 et $n-1$) tel que le mot est σ_i -positif. On définit les mots σ -négatifs de façon analogue. On dit un mot est σ -cohérent s'il est σ -positif ou σ -négatif. Enfin, on définit l'ordre $>$ sur B_n en déclarant que $\alpha < \beta$ si $\alpha^{-1}\beta$ peut être représenté par un mot σ -positif.

Il n'est pas du tout évident que ceci définit une relation d'ordre, et encore moins qu'il s'agit d'un ordre *total*. Ceci revient à dire qu'une tresse n'admet jamais

une représentante σ -positive et une autre σ -négative, et que toute tresse admet une des deux.

La démonstration originale de Dehornoy, bien que belle et profonde, est peu satisfaisante pour des géomètres et topologues. Elle utilise une théorie de coloriage des brins de la tresse par des éléments d'un objet algébrique quelque peu inhabituel, qu'il appelle un LD-système (une notion qui est proche des *racks* de Fenn et Rourke [57]). Elle est inspirée (bien que logiquement indépendante) par un certain axiome en théorie des ensembles qui s'appelle l'axiome de l'existence des grands cardinaux.

Une réinterprétation topologique de l'ordre de Dehornoy, et une preuve topologique qu'il est bien-défini, se trouvent dans l'article [55] (et aussi, indépendamment, dans [88]). Comme suggéré dans l'introduction, nous noterons D_n le disque unité dans le plan \mathbb{C} , muni de n points distingués, qui sont alignés sur la droite réelle. Nous noterons E le diagramme des courbes constitué des $n + 1$ sous-segments de l'intervalle $[-1, 1]$ ainsi définis. Nous allons définir un ordre $<_{DC}$ sur B_n (ou "DC" est l'abréviation de "diagramme de courbes").

Étant données deux tresses distincts α et β , notre but est donc de définir laquelle est la DC-plus grande, en superposant leurs diagrammes de courbes $\alpha(E)$ et $\beta(E)$ en position relative réduite, comme expliqué dans l'introduction. On peut ensuite couper le disque le long des arcs de $\beta(E)$, pour obtenir deux composantes connexes, une *supérieure*, contenant le point $i \in \mathbb{C}$, et une *inférieure*, contenant le point $-i$. Si alors $\alpha((-1, -1 + \epsilon))$ se situe dans la composante supérieure (si α "va plus vers le haut que" β), on dit que $\alpha >_{DC} \beta$. De façon analogue, si un segment initial d' α part vers la partie inférieure de $D_n \setminus \beta(E)$, alors on dit que $\alpha <_{DC} \beta$. Par exemple, on voit en figure 1 que $1 <_{DC} \sigma_1 \sigma_2^{-1} <_{DC} \sigma_1$. Enfin, il peut arriver que des segments $\alpha((1, x])$ et $\beta((1, x])$, pour un $x \in (-1, 1)$, coïncident. Dans ce cas là, on considère un segment $\alpha((x, x + \epsilon))$ au lieu du segment $\alpha((-1, -1 + \epsilon))$.

Il est assez facile à voir que l'ordre $<_{DC}$ est un ordre total, et invariant à gauche. De plus, cet ordre coïncide avec l'ordre de Dehornoy car, si β est une tresse σ_i -positive, alors on trouve que $\beta >_{DC} 1$; en effet, dans le diagramme de courbes d'une telle tresse σ_i -positive les $i-1$ premiers segments de $\beta(E)$ coïncident avec les intervalles correspondants de E , et un germe du i ème segment se trouve dans la partie supérieure de $D_n \setminus E$.

En particulier, ceci redémontre le résultat de Dehornoy qu'une tresse ne peut pas être représenté par un mot σ -positif *et* par un autre mot σ -négatif.

En fait, cette approche topologique peut servir pour redémontrer tout le théorème structurel de Dehornoy : toute tresse non-triviale β peut être représenté par un

mot σ -positif ou un mot σ -négatif (mais jamais par les deux). Cette démonstration est le centre de l'article [55]. L'idée est de "relaxer" le diagramme de courbes de β vers le diagramme trivial, en permettant aux points distingués de se déplacer – on peut s'imaginer que les courbes du diagramme de courbes sont constitués d'un matériel élastique, et on "lâche" le diagramme. Par contre, la relaxation doit se faire de façon soigneuse, si l'on souhaite qu'elle crée un mot σ_1 -positif. Si, par exemple, la tresse β satisfait $\beta >_{DC} 1$, alors on cherche une relaxation qui évite rigoureusement de déplacer un point distingué *au-dessous* du point distingué le plus à gauche pour qu'il prenne, lui, le rôle du point le plus à gauche; en revanche, un point distingué peut bien se déplacer *au-dessus* du point qui était jusqu'alors le plus à gauche. L'idée de la construction de cette relaxation contrôlée est donnée dans la figure 3.

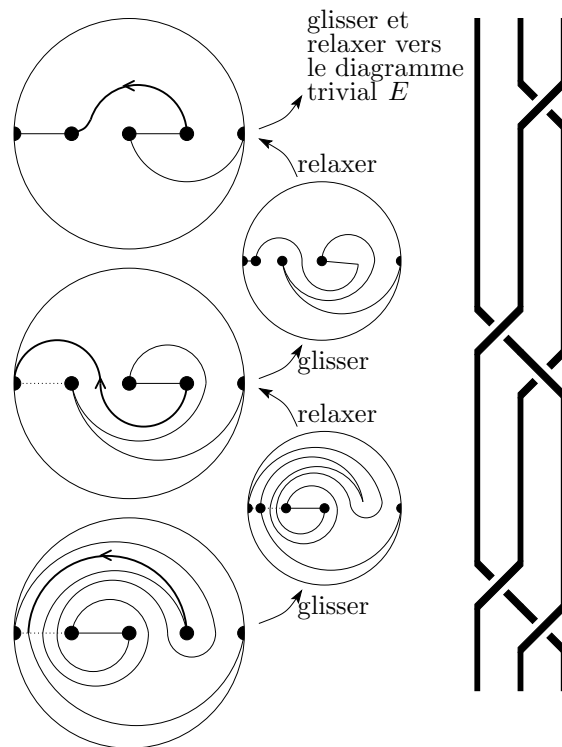


FIG. 3 – Comment démêler le diagramme de courbes d'une tresse de façon contrôlée pour obtenir une tresse σ -cohérente. Dans cet exemple, on obtient la tresse σ_1 -positive $\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$.

L'article [122] redémontre dans ce cadre que l'ordre de Dehornoy étend l'ordre des sous-mots. Une meilleure démonstration d'un théorème plus fort se trouve

dans l'article [117].

Remarquons à ce point que notre définition topologique de l'ordre de Dehornoy sur B_n se généralise presque trivialement vers des groupes d'homéotopies de toutes les surfaces S , où S est une surface compacte, avec ou sans points distingués, orientable ou non-orientable, mais avec au moins une composante de bord.

Une question naturelle se pose maintenant : vu que le groupe B_n agit par homéomorphismes sur la droite réelle (voir partie 1.2), y a-t-il une action "naturelle" et "intuitive" sur \mathbb{R} ? L'article [117] fournit une réponse positive, en utilisant des techniques dus à Nielsen et Thurston. L'idée est assez simple : d'abord, on enlève les points distingués du disque D_n ; par un abus de notation, ce disque n fois troué va toujours être noté D_n . Ensuite, on munit D_n d'une structure hyperbolique arbitraire, et on plonge le revêtement universel \widehat{D}_n de façon isométrique dans le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . Si S_∞^1 note le cercle à

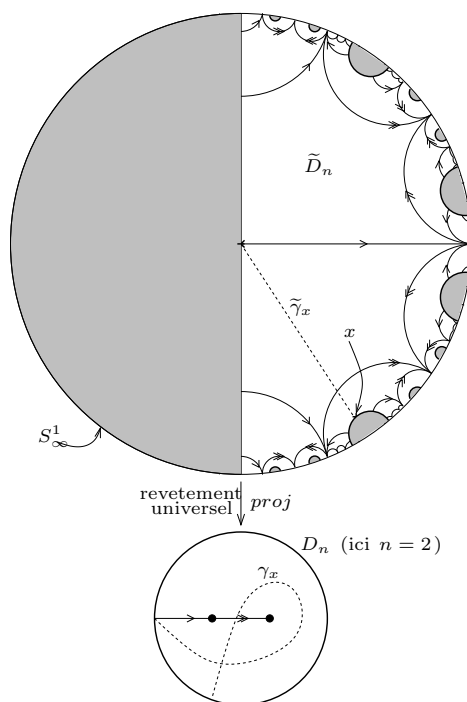


FIG. 4 – La construction de la droite réelle sur laquelle B_n agit, et la correspondance entre points de cette droite et géodésiques dans D_n .

l'infini de \mathbb{H}^2 , alors le bord de l'adhérence de \widehat{D}_n dans $\mathbb{H}^2 \cup S_\infty^1$ est un cercle

qui intersecte S_∞^1 dans un ensemble de Cantor. Ensuite, on choisit un point du cercle – plus spécifiquement un point qui n'est pas à l'infini – et on le déclare le point de base du cercle. On construit alors une action de $B_n = \mathcal{MCG}(D_n)$ sur le cercle qui agit trivialement sur le point de base, de la façon suivante. Tout homéomorphisme de D_n se relève de façon unique à un homéomorphisme de \widehat{D}_n qui fixe le point de base, et cet homéomorphisme s'étend de façon unique aux points à l'infini de l'adhérence de \widehat{D}_n . En plus, deux homéomorphismes qui sont homotopes, dans le sens qu'ils représentent le même élément de $\mathcal{MCG}(D_n)$, induisent le même homéomorphisme sur le bord de l'adhérence de \widehat{D}_n .

On a donc une action bien-définie de B_n sur un cercle, et cette action est triviale sur le point de base du cercle, donc on a une action sur la droite réelle \mathbb{R} . Il est assez facile à voir que seul l'élément neutre de $\mathcal{MCG}(D_n)$ agit de façon triviale. Ceci donne encore une autre démonstration du caractère ordonnable à gauche des groupes de tresses.

De nouveau, cette définition s'étend immédiatement vers $\mathcal{MCG}(S)$, où S est une surface compacte arbitraire avec la seule contrainte qu'on doit avoir $\partial S \neq \emptyset$.

En analysant cette action de B_n sur \mathbb{R} , on trouve qu'il y a beaucoup de points de \mathbb{R} sur lesquels \mathbb{R} agit librement, c'est-à-dire que tous les points de l'orbite sont distincts. Dans ce qui suit, on va restreindre notre attention à des tels points. Si x est un point sur lequel B_n agit librement, alors on a un ordre total invariant à gauche $<_x$ sur B_n associé, qui est donné par

$$\alpha <_x \beta \text{ si et seulement si } \alpha(x) < \beta(x)$$

(où $<$ note l'ordre habituel sur \mathbb{R}). On appellera les ordres de B_n qui s'obtiennent de cette manière très naturelle des ordres *de type Nielsen-Thurston*. Le but principal de l'article [117] est de classifier les ordres sur B_n de type Nielsen-Thurston. La classification est faite à *conjugaison près*. On rappelle que deux ordres invariants à gauche sur un groupe G sont dit *conjugués* s'il existe un automorphisme intérieur de G qui envoie un ordre sur l'autre. Dans notre contexte, ceci veut dire que deux ordres $<$ et \prec sur B_n sont conjugués s'il existe un élément $\alpha \in B_n$ tel qu'on aie $\beta_1 < \beta_2$ si et seulement si $\beta_1\alpha \prec \beta_2\alpha$.

Pour obtenir une idée intuitive, voyons présentement un exemple de deux ordres qui sont tous les deux des type Nielsen-Thurston, mais qui sont non-conjugués. Pour visualiser un point x de la droite \mathbb{R} sur laquelle B_n agit, nous allons exploiter la correspondance naturelle entre de tels points x et des rayons géodésiques sur D_n qui commencent dans la projection du point de base, dans ∂D_n . Cette correspondance associe à un point x la projection de la géodésique dans \widehat{D}_n qui commence sur le point de base, et se termine dans x (voir figure 4).

Intuitivement, si deux points x, y sont “proches”, alors les deux géodésiques correspondantes dans D_n restent proches pendant un long segment initial, et il n’y a que des queues qui partent dans des directions différentes. Si, par contre, x et y sont “éloignés”, alors les géodésiques correspondantes partent, dès le début, dans des directions assez différentes.

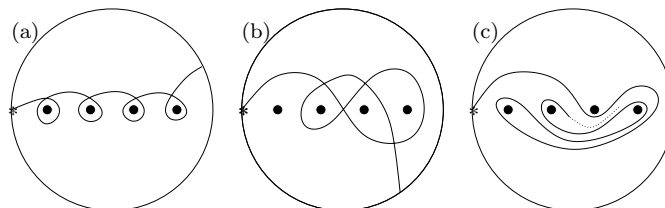


FIG. 5 – Les ordres de type Nielsen-Thurston de B_n associés aux deux géodésiques dans (a) et (b) sont tous les deux discrets mais ils ne sont pas conjugués. L’ordre associé à (c) est dense.

On peut démontrer que les ordres de type Nielsen-Thurston de B_n associés aux deux géodésiques dans (a) et (b) dans la figure 5 ne sont pas conjugués. L’idée de la démonstration est d’étudier leurs sous-groupes convexes. On rappelle que dans tout groupe ordonné, les sous-groupes convexes sont totalement ordonnés par inclusion [13]. Or, les chaînes de sous-groupes convexes dans les deux ordres étudiés ici sont

- dans $(B_4, <_{(a)})$: $\{1_{B_4}\} \subset \langle \sigma_3 \rangle \subset \langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle \subset \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle = B_4$
- dans $(B_4, <_{(b)})$: $\{1_{B_4}\} \subset \langle \sigma_3 \rangle \subset \langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle \subset \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle = B_4$.

(Effectivement, on voit que l’action du sous-groupe σ_3 n’affecte que des segments terminaux des deux géodésiques, et ne touche pas des longs segments initiaux. Ensuite, le sous-groupe engendré par σ_2 et σ_3 agit sur un segment terminal un peu plus long de la géodésique (a), pendant que pour la géodésique (b) c’est plutôt le sous-groupe engendré par σ_1 et σ_3 qui n’agit que sur une queue un peu plus longue, laissant néanmoins fixe un certain segment initial. Enfin, si l’on considère l’action de tout B_4 , les deux géodésiques peuvent être poussés arbitrairement loin dans les deux directions.)

La première chaîne de sous-groupes convexes contient le groupe $\langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle$, qui est isomorphe à B_3 , et pas de groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 . La deuxième chaîne, par contre, contient le sous-groupe $\langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle$, qui est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , mais pas de groupe isomorphe à B_3 ; donc les deux ordres $<_{(a)}$ et $<_{(b)}$ sur B_4 ne sont effectivement pas conjugués.

On voit assez facilement que les deux ordres $<_{(a)}$ et $<_{(b)}$ sont discrets. En fait, on peut démontrer que l’ordre $<_{(a)}$ est exactement l’ordre de Dehornoy.

En revanche, il existe d'autres exemples d'ordres avec des propriétés complètement différentes - un exemple est symboliquement donné dans la figure 5(c). Dans cette figure, la géodésique devrait être étendue infiniment, pour ressembler à une lamination géodésique irrationnelle. On démontre que les ordres associés à des tels géodésiques sont presque tous des ordres totales ; et les ordres de type Nielsen-Thurston obtenus de cette façon sont denses.

Le résultat de la classification complète des ordres de type Nielsen-Thurston dans [117] est comme suit :

Théorème 2.2 *Pour tout entier n , le groupe de tresses B_n a, à conjugaison près, un nombre fini de types d'ordres discrets, et un ensemble non-dénombrable d'ordres denses de type Nielsen-Thurston. Le nombre d'ordres discrets est donné par une formule de récurrence : si Ψ_n note le nombre d'ordres discrets de type Nielsen-Thurston du groupe B_n , alors*

$$\Psi_1 = 1, \Psi_2 = 1, \quad \text{et} \quad \Psi_{n+1} = \Psi_n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \Psi_k \Psi_{n+1-k}.$$

Par calcul, on trouve $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = 1$, $\Psi_3 = 1$, $\Psi_4 = 3$, $\Psi_5 = 9$, $\Psi_6 = 39$, $\Psi_7 = 189$ et $\Psi_8 = 1107$.

Malheureusement, l'article [117] contient une faute de frappe, qui a été copié vers [40] : ces deux sources donnent la valeur $\Psi_8 = 1197$. Il est un fait intéressant et jusqu'ici non publié que cette même suite est aussi connue en combinatoire [102] dans la forme suivante : si l'on note $\psi_n := \Psi_{n+1}$, alors¹ ψ_n est le nombre de permutations de n symboles sans double chute et sans chute initiale. Sa fonction génératrice (voir [125]) $f(x) = \sum_{n \geq 0} \psi_n \frac{x^n}{n!}$ satisfait l'équation différentielle $f'(x) = 1 - f(x) + (f(x))^2$ et peut même être donné explicitement par

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}.$$

Un problème ouvert très intéressant, et probablement assez abordable, est de généraliser toute la théorie de la classification des ordres de Nielsen-Thurston vers des groupes d'homéotopies de surfaces plus générales. En particulier, si $S_{g,n}$ est la surface de genre g avec une composante de bord et n points distingués,

¹Je remercie Samuel Lelièvre pour avoir attiré mon attention sur l'article [102], et pour son aide avec les fonctions génératrices et la relation entre les deux interprétations de la suite Ψ_n .

est-ce que $\mathcal{MCG}(S_{g,n})$ a toujours un nombre *fini* d'ordres de type Nielsen-Thurston à conjugaison près ? Si oui, combien, en fonction de g et n ? Y a-t-il une fonction génératrice à deux variables ?

Il faut encore discuter une propriété partagée par toutes les ordres de Nielsen-Thurston de B_n , et dont certains aspects restent mystérieux. On rappelle que les ordres de type Nielsen-Thurston sont invariants à gauche, mais ils ont aussi la propriété “d'invariance à droite faible” suivante :

Proposition 2.3 *Si “ $>$ ” est un ordre de B_n de type Nielsen-Thurston, si π est une tresse qui est positive au sens stricte que $\pi \in B_n^+$, et si $\beta \in B_n$ est une tresse arbitraire, alors on a $\pi\beta > \beta$.*

Ce résultat est démontré dans [117], mais il avait déjà été démontré, dans le cas spécial de l'ordre de Dehornoy, dans [89] et [122]. En utilisant un résultat de Higman [77] qui dit que dans un ensemble infini de mots sur un alphabet fini il existe toujours un couple de mots tels que l'un est un sous-mot de l'autre, on déduit

Corollaire 2.4 *Si “ $>$ ” est un ordre de type Nielsen-Thurston sur le groupe de tresses B_n , alors la restriction de l'ordre $>$ à B_n^+ est un bon-ordre (c'est à dire, toute suite décroissante est constante à partir d'un certain rang).*

Ceci soulève immédiatement la question quel est le *type* de ce bon-ordre. Serge Burckel [20, 21] a répondu à cette question dans le cas spécial de l'ordre de Dehornoy. Son résultat est que $(B_n^+, <_{\text{Dehornoy}})$ est isomorphe, en tant qu'ensemble ordonné, à $\omega^{\omega^{n-2}}$. En plus, il donne un algorithme pour calculer l'ordinal représenté par n'importe quelle tresse positive $\beta \in B_n^+$.

La question se pose alors quel est le type d'ordre de l'ensemble bien-ordonné $(B_n^+, >)$, où $>$ est un autre ordre discret de type Nielsen-Thurston. Malheureusement, la démonstration de Burckel est très combinatoire et elle utilise des techniques qui ont peu de rapport avec le reste de la littérature sur les tresses. Il semble donc peu probable que ce problème pourra être résolu par une simple généralisation des techniques de Burckel.

Pour terminer ce chapitre, nous discuterons très rapidement des bi-ordres sur des groupes des tresses. Il n'y a pas d'ordre total invariant à droite et à gauche sur B_n . En revanche, le groupe des tresses pures PB_n est bi-ordonnable, par un résultat de Kim et Rolfsen [86]. En fait, González-Meneses a démontré que le groupe des tresses pures à n brins ($n \geq 1$) sur n'importe quelle surface compacte

S est bi-ordonnable. La démonstration de ce résultat utilise une analyse détaillée de la série central descendante du groupe $PB_n(S)$.

On déduit immédiatement que les groupes de tresses pures ont (comme tous les groupes bi-ordonnables) la propriété des racines uniques : si β_1 et β_2 sont deux tresses pures et si k est un entier tel que $\beta_1^k = \beta_2^k$, alors $\beta_1 = \beta_2$.

Il est étonnant que la démonstration du résultat suivant, qui est inspirée par [66], utilise des méthodes complètement différentes, à savoir la classification de Nielsen-Thurston. Il concerne le groupe des tresses B_n (non pas PB_n) :

Proposition 2.5 ([65]) *Dans B_n , les racines sont uniques à conjugaison près.*

Enfin, on remarque que selon Rhemtulla et Rolfsen [109], le bi-ordre de Kim-Rolfsen sur PB_n a des propriétés assez surprenantes. D'une part, il est dense ; néanmoins, sa restriction à PB_n^+ est un bon-ordre. De plus (par [86]), il étend l'ordre (partiel) des sous-mots sur PB_n^+ . Tout ceci pourrait suggérer qu'il est semblable à un ordre de type Nielsen-Thurston, mais cela est faux : un autre théorème de Rhemtulla et Rolfsen [109] affirme qu'aucun bi-ordre sur PB_n s'étend à un ordre invariant à gauche sur B_n .

3 Algorithmes pour décider l'ordre

Dans le chapitre précédent, nous avons vu plusieurs constructions d'un certain ordre sur B_n , l'ordre de Dehornoy (et d'autres ordres sur B_n et d'autres groupes). La question se pose s'il existe des *algorithmes* (efficaces, de préférence) pour décider si une tresse donnée est positive ou négative (ou triviale) dans l'ordre de Dehornoy. Ce problème est équivalent au problème (à première vue plus difficile) de décider laquelle de deux tresses β_1 et β_2 est la plus grande – car il suffit de décider si $\beta_1^{-1}\beta_2$ est positive, négative, ou triviale.

La réponse est positive : il y a des méthodes très performantes. Nous allons présenter deux approches, l'une basée sur les méthodes topologiques présentées dans le chapitre précédent, et l'autre basée sur la caractérisation de l'ordre par σ -cohérence.

3.1 Algorithmes topologiques

Si l'on ne se soucie pas des questions d'efficacité, le problème posé est très facile à résoudre : il suffit d'apprendre à un ordinateur à calculer le diagramme de

courbes d'une tresse donné. On doit donc coder des diagrammes de courbes de tresses de telle façon qu'un ordinateur puisse les gérer et modifier. Une fois que le diagramme de courbes d'une tresse, codé de cette façon, est connu, il est en général très facile de décider s'il s'agit d'un diagramme positif, négatif, ou trivial.

Le problème principal est, intuitivement parlant, que la complexité du diagramme de courbes d'une tresse β a tendance à augmenter de façon exponentielle avec la longueur du mot dans les générateurs $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ représentant β . On court donc le risque de créer des algorithmes dont le temps de calcul augmente exponentiellement avec la longueur du mot de tresse. Pour éviter cela, on doit coder les diagrammes de courbes de façon plus efficace, typiquement par des réseaux ferroviaires dont les arêtes sont étiquetées par des entiers, ou en utilisant une autre astuce équivalente.

Un algorithme particulièrement élégant de ce type est dû à Dynnikov [43]. Dans son algorithme, un diagramme de courbes est codé comme un point du réseau \mathbb{Z}^{2n} , et le groupe de tresses agit sur \mathbb{Z}^{2n} par des isomorphismes qui sont linéaires par morceaux. Étant donnée une tresse β , la question si β est positive, négative, ou triviale peut être résolu par une simple inspection de l'image du vecteur $(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ par l'action de β . De plus, si β est représenté par un mot de tresse dans les lettres $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ de longueur ℓ , alors toutes les $2n$ composantes du vecteur $\beta \cdot (0, 1, \dots, 0, 1)$ sont des entiers dont la valeur absolue est inférieure à C^ℓ , où C est une constante indépendante de β . L'algorithme de Dynnikov doit donc exécuter $O(\ell)$ opérations, dont chacune est le calcul d'une combinaison linéaire de $2n$ entiers qui prennent $O(\ell)$ places de mémoire. On obtient donc une borne *quadratique* sur la complexité (en temps) et une borne *linéaire* sur la complexité (en espace de stockage) de l'algorithme.

Si l'on cherche à éviter les calculs avec des entiers arbitrairement grands, on est naturellement amené à étudier les relations entre l'ordre et les structures *automatiques* sur B_n . Pour une introduction aux automates à un nombre fini d'états (*finite state automata*, en anglais) et groupes automatiques, on peut, par exemple, consulter [116, 105, 15].

Sur les groupes de tresses, il y a deux (ou bientôt trois) structures automatiques connues :

- (1) Celle basée sur les travaux de Garside [60, 47, 120, 39] – il s'agit même d'une structure *bi-automatique*. Malheureusement, la relation entre la structure automatique de Garside et l'ordre de Dehornoy est actuellement assez mal comprise. Notamment, étant donnée une tresse en forme normale de Garside, on ne sait pas “lire” si elle est positive ou négative dans l'ordre.

- (2) Celle de Mosher [97, 98]. Cette structure a l'avantage de se généraliser vers d'autres groupes d'homéotopies, mais l'inconvénient de ne pas être bi-automatique.
- (3) Celle de Hamenstädt, jusqu'ici distribuée qu'en forme préliminaire. Il s'agirait d'une structure bi-automatique sur les groupes d'homéotopies de surfaces compactes.

Discutons maintenant la structure de Mosher ; nous verrons que cette structure est très bien adaptée à des questions d'ordre. On considère B_n comme le groupe d'homéotopies de D_n , où D_n est le disque unité dans le plan complexe avec n points distingués sur la droite réelle, et avec quatre points supplémentaires, à $1, -1, i$, et $-i$. On considère l'ensemble des triangulations singulières du disque telles que les sommets sont les points distingués. (Intuitivement, une triangulation singulière est comme une triangulation, sauf que des triangles “dégénérés” sont permis, comme ceux en figure 6(b)). L'ensemble des classes d'isotopie de triangulations singulières de D_n a une infinité d'éléments. Par contre, le quotient de cet ensemble par l'action naturelle de $B_n = \mathcal{MCG}(D_n)$ n'a qu'un nombre fini d'éléments, les *types combinatoires de triangulations* de D_n . Dans la structure automatique de Mosher, les états (“states”, en anglais) correspondent aux types combinatoires de triangulations. Dans l'automate, on a une arête menant d'un état à un autre si les deux triangulations de D_n correspondantes sont identiques, à l'exception d'une seule arête, qui a été “tournée” (voir la figure 6).

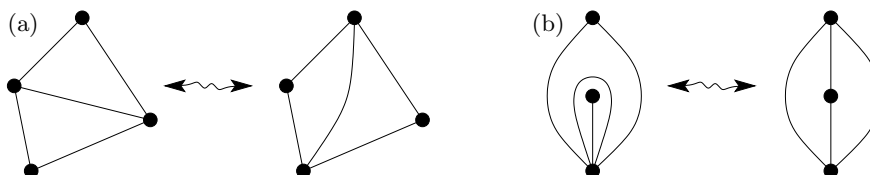


FIG. 6 – Exemples de triangulations singulières, et du processus de “tourner” une arête d’une triangulation.

Dans la structure automatique de Mosher, la “forme normale” d’un élément de B_n est une suite de classes combinatoires de triangulations de D_n , où chaque terme de la suite est obtenu de son prédécesseur en tournant une arête. De plus, la suite commence et se termine avec la même triangulation, et satisfait certaines autres propriétés (pour les détails, voir [97]). Les propriétés qui rendent le travail de Mosher si remarquable sont que, si la tresse est représentée par un mot de longueur ℓ dans les lettres $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, alors la suite de triangulations est de longueur $O(\ell)$, et peut être calculé en temps $O(\ell^2)$.

Le résultat principal de l'article [111] est :

Théorème 3.1 (a) *Étant donnée la suite de triangulations associées à une tresse β , on peut décider, par une simple inspection des deux premiers termes de la suite, si β est positive, négative, ou triviale, dans l'ordre de Dehornoy.*

(b) *Étant données les suites de triangulations associées à deux tresses β_1 et β_2 on peut décider laquelle des deux tresses est plus grande dans l'ordre de Dehornoy par une inspection des termes numéro $i, i + 1, i + 2, i + 3$ et $i + 4$, où le i ème terme est par définition le premier terme où les deux suites ne coïncident pas.*

Pour terminer cette partie nous remarquons que tous les algorithmes décrits ici se généralisent : pour toute surface à bord S , il existent certains ordres sur $\mathcal{MCG}(S)$ qui sont décidables par des algorithmes semblables. néanmoins, il serait un projet de recherche intéressant de trouver des algorithmes aussi efficaces que ceux présentés ici pour *tous* les autres ordres discrets de type Nielsen-Thurston sur B_n ou $B_n(S)$.

3.2 Algorithme de réduction des poignées

Dans cette partie, nous nous intéressons à un type d'algorithme tout à fait différent, à savoir un algorithme qui exploite la combinatoire des mots de tresse (aux lettres $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$). Il s'agit de l'algorithme de réduction des poignées de Dehornoy, qui transforme tout mot de tresse vers un autre mot qui est σ -cohérent et représente le même élément de B_n . Tous les travaux présentés dans cette partie sont dus à P. Dehornoy.

Definition 3.2 *Si w est un mot de tresse, alors une poignée de w est un segment de w de la forme $\sigma_i^{\pm 1} v \sigma_i^{\mp 1}$ ($i \in \{1, \dots, n - 2\}$), où le mot v*

- *ne contient pas de lettre $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \sigma_{i-1}$ ou σ_{i-1}^{-1}*
- *peut contenir des lettres σ_{i+1} ou σ_{i+1}^{-1} , mais pas les deux.*

(En fait, cette définition décrit ce que Dehornoy appelle une *poignée permise*, une *poignée* étant un objet légèrement plus général.)

La *réduction* d'une poignée est le remplacement de la poignée par un autre sous-mot représentant le même élément de B_n , de la façon suivante : si la poignée est

$$\sigma_i^\varepsilon w_1 \sigma_{i+1}^\delta w_2 \sigma_{i+1}^\delta w_3 \dots \sigma_{i+1}^\delta w_k \sigma_i^{-\varepsilon},$$

où $\varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$, $k \in \mathbb{N}$, et les mots w_1, \dots, w_k ne contiennent pas de lettre $\sigma_{i-1}^{\pm 1}, \sigma_i^{\pm 1}$, ou $\sigma_{i+1}^{\pm 1}$, alors cette poignée est remplacée par

$$w_1 \sigma_{i+1}^{-\varepsilon} \sigma_i^{\delta} \sigma_{i+1}^{\varepsilon} w_2 \sigma_{i+1}^{-\varepsilon} \sigma_i^{\delta} \sigma_{i+1}^{\varepsilon} w_3 \dots \sigma_{i+1}^{-\varepsilon} \sigma_i^{\delta} \sigma_{i+1}^{\varepsilon} w_k$$

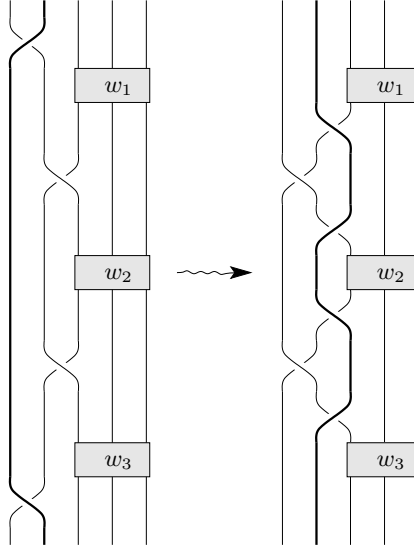


FIG. 7 – La réduction d’une poignée

L’*algorithme de réduction de poignées* de Dehornoy consiste simplement à chercher une poignée (s’il y en a plusieurs, on en choisit arbitrairement une), et de la réduire, et à itérer ce procédé jusqu’à ce qu’on trouve un mot de tresse sans poignées. Un tel mot est σ -cohérent.

Dehornoy a démontré [37] que l’algorithme se termine en temps fini, c’est-à-dire qu’après un nombre fini de réductions on arrive à un mot de tresse sans poignées. En fait, il a obtenu une borne très explicite sur le nombre d’étapes que l’algorithme doit exécuter : si le mot de tresse est de longueur ℓ , alors au plus $2^{n^4 \ell}$ étapes seront nécessaires ; il y a une borne semblable sur la longueur des mots de tresse obtenus pendant le processus.

À première vue, ces résultats ne sont pas passionnants. Or, des expériences sur ordinateur (par P. Dehornoy, H. Sibert, et, indépendamment, moi-même) avec des ensembles très importants de de tresses aléatoires, et pour des très grands valeurs de n et ℓ , indiquent que la conjecture suivante de Dehornoy doit être vraie :

Conjecture 3.3 *On considère l’algorithme de réduction de poignées, appliqué dans B_n à un mot de longueur ℓ .*

(a) *Tous les mots apparaissant pendant l’algorithme sont de longueur au plus $C_1 \cdot n \cdot \ell$, où C_1 est une constante indépendante de ℓ et n .*

(b) *L’algorithme a au plus $C_2 \cdot n \cdot \ell^2$ étapes.*

Nous remarquons que l’exemple du mot

$$\sigma_1 \sigma_2^{-2} \sigma_3^2 \sigma_4^{-2} \dots \sigma_{n-3}^{2\epsilon} \sigma_{n-2}^{-2\epsilon} \sigma_{n-1}^{2\epsilon} \cdot \sigma_{n-2}^{2\epsilon} \sigma_{n-3}^{-2\epsilon} \sigma_{n-4}^{2\epsilon} \dots \sigma_3^{-2} \sigma_2^2 \sigma_1^{-1}$$

(avec $\epsilon = (-1)^n$) montre qu’en (a) on ne peut pas avoir une borne de la forme $C_1 \cdot \ell$ (indépendant de n); ceci réfute la spéculation suivant Conjecture 10.2.1 de [40].

En fait, on conjecture qu’il existe un algorithme qui trouve une représentante σ -cohérente d’une tresse à n brins représenté par un mot de tresse de longueur ℓ en temps $O(\ell^2)$. On remarque que la conjecture 3.3 implique que l’algorithme de réduction des poignées fonctionne en temps $O(\ell^3)$. Donc même si la conjecture 3.3 est vraie, on n’obtient pas immédiatement un temps de calcul quadratique. D’autres astuces, par exemple du type “*divide and conquer*” seront nécessaires.

On se trouve dans la situation paradoxale suivante : cet algorithme, qui a été conçu pour décider l’ordre et, *en particulier*, résoudre le problème des mots, est *en pratique* la solution au problème des mots la plus efficace connue, et de loin. Ceci est d’autant plus étonnant que cet algorithme est très mal compris, et qu’on ne sait même pas estimer rigoureusement sa complexité.

L’absurdité de cette situation a été la motivation principale pour les travaux [41] et [44], qui placent cette problématique, de deux façons différentes, dans des cadres plus généraux.

4 Quasi-géodésiques dans le groupe des tresses, et une nouvelle métrique pour Γ_{B_n}

Dans ce chapitre, nous allons plutôt nous placer dans le cadre de la théorie géométrique des groupes, et étudier les propriétés quasi-isométriques du graphe de Cayley Γ_{B_n} . L’objet de notre étude sont les quasi-géodésiques. Les quasi-géodésiques dans des groupes de tresses, et plus généralement des groupes d’homéotopie sont actuellement très mal comprises. Il y a très peu d’exemples

connus de familles de quasi-géodésiques qui relient le sommet identité avec n'importe quel autre sommet. Ceux qu'on connaît sont pour la plupart des formes normales de structures automatiques. Nous allons construire de nouveaux exemples de telles familles (décrits pour la première fois en [44]), basés sur un théorème récent de Hamenstädt [76] : des suites de scindements de réseaux ferroviaires sont des quasi-géodésiques dans des groupes d'homéotopie.

4.1 Retournements de mots

Dans cette partie, nous nous intéressons à la question suivante. Étant donné un membre d'une famille uniforme de quasi-géodésiques est-ce qu'elle reste dans cette famille (ou peut-être dans une famille un peu plus grande) si l'on se permet de la "déformer" par certaines opérations ?

Definition 4.1 *On dit qu'un mot w' est obtenu à partir d'un mot w par des retournements à droite (réduits) si l'on peut transformer w vers w' en remplaçant des sous-mots $\sigma_i^{-1}\sigma_j$ par $\sigma_j\sigma_i^{-1}$ (cas $|i-j| \geq 2$), ou par $\sigma_j\sigma_i\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}$ (cas $|i-j| = 1$), suivi immédiatement par une réduction libre. Un retournement à gauche est défini de façon analogue, en renversant tous les signes.*

Conjecture 4.2 Quel que soit $n \geq 2$, il existe une constante C_n telle que la propriété suivante est satisfaite : si w et w' sont des mots représentant une tresse dans B_n , et si w' est obtenu à partir de w par des retournements de sous-mots et par des applications des relations de commutation, alors

$$\frac{\text{longueur } w'}{\text{longueur } w} \leq C_n.$$

On peut raisonnablement faire des conjectures semblables pour tous les groupes de Garside.

Une des applications potentielles de la conjecture 4.2 est qu'elle impliquerait que l'algorithme de réduction de poignées de Dehornoy (voir partie 3.2) n'augmente la longueur des mots que par un facteur linéaire (car toute réduction de poignées s'écrit comme une composition de retournements et de commutations). Une solution de cette conjecture mènerait sans doute vers une solution de la conjecture 3.3, qui affirme que l'algorithme de Dehornoy marche en temps quadratique.

Voici une raison intuitive pourquoi des retournements et commutations ne devraient pas faire sortir d'une famille uniforme de quasi-géodésiques. Considérons

la structure produit sur le complexe des drapeaux $\widehat{\mathcal{X}}_D$ modélisé sur le graphe de Cayley de B_n [9, 27]. Bestvina a démontré qu'il y a un homomorphisme naturel $\widehat{\mathcal{X}}_D \cong \mathcal{X}_D \times \mathbb{R}$, où \mathbb{R} est la direction qui correspond aux puissances de Δ , et où \mathcal{X}_D est un autre complexe qui satisfait certaines conditions faibles de courbure non-positive, et dont on conjecture qu'il est $CAT(0)$. Interprétons ensuite une tresse comme un chemin dans $\widehat{\mathcal{X}}_D$, et nos transformations comme des déformations du chemin préservant ses points extrémaux. Alors le fait que les transformations du type $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \rightarrow \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ne sont pas des retournements de mots enlève la façon la plus évidente de déformer les chemins dans la direction \mathcal{X}_D . Autrement dit, si l'on n'applique que des relations de commutation de des retournements de mots, alors on déforme le chemin principalement dans la direction \mathbb{R} .

En effet, une conjecture précédente de Dehornoy [36, 40] affirmait que la longueur d'un mot de tresse ne peut pas augmenter par plus qu'un facteur linéaire si l'on permet des retournements de mots et tout genre d'équivalences monotones, c.à.d. des remplacements du type $(\sigma_i \sigma_j)^{\pm 1} \leftrightarrow (\sigma_i \sigma_j)^{\pm 1}$ (pour $|i - j| \geq 2$) mais aussi du type $(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i)^{\pm 1} \leftrightarrow (\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})^{\pm 1}$. Cette conjecture s'est avérée fautive – par exemple, le mot

$$\sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} (\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1})^k$$

est équivalent (en ce sens élargi) au même mot avec l'exposant k remplacé par $k + 1$; de plus, ceci est le cas même si l'on interdit à tout moment des sous-mots évidemment simplifiables comme $\sigma_1 \sigma_3^k \sigma_1^{-1}$.

La conjecture 4.2, en revanche, a résisté à toutes nos attaques – en particulier aux expériences sur ordinateur assez conséquentes semblables à celles qui ont fourni l'exemple précédent.

L'article [41] fournit aussi quelques résultats positifs. Notamment, dès qu'on évite de mélanger des retournements à droite et à gauche, on obtient des bornes plutôt satisfaisantes :

Proposition 4.3 *Soit w un mot dans les lettres $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ de longueur ℓ , représentant un élément de B_n . Alors on a :*

- (i) *Tout mot obtenu à partir de w par des retournements à droite est de longueur au plus $C_n \ell$ (avec $C_n = \frac{1}{2} 3^n$).*
- (ii) *Tout mot obtenu à partir de w par des retournements à droite et des équivalences monotones est de longueur au plus $2^{C'_n \ell}$ (avec $C'_n = \frac{1}{2} n(n - 1)$).*

- (iii) Tout mot $w_p w_n^{-1}$ (avec w_p, w_n des mots positifs) obtenu à partir de w par des retournements à droite et des équivalences monotones est de longueur au plus $C_n'' \ell$ (avec $C_n'' = \frac{1}{2}n(n-1) - 1$).

Le résultat (iii) semble indiquer que la procédure “retourner à droite et appliquer des équivalences entre sous-mots positives ou négatives jusqu’à ce qu’on trouve un mot de la forme positive-négative” est efficace. (Une telle conclusion serait intéressante, car par [38], son application à un mot w , suivi par une deuxième application dans le sens contraire, pour aboutir à un mot négative-positive, termine avec le mot trivial si et seulement si w représentait l’élément trivial de B_n . La procédure est donc une solution du problème des mots.) Or, cette conclusion serait hâtive car on n’a justement que la borne exponentielle de (ii) sur la longueur des mots obtenus *pendant* l’algorithme.

4.2 Relaxation de diagrammes de courbes, et une nouvelle métrique sur Γ_{B_n}

Cette partie est basé sur les articles [123] et [44]. Nous nous posons deux questions étroitement liées : premièrement, est-ce que le point de vue des diagrammes de courbes peut aider pour trouver une famille de quasi-géodésiques représentant n’importe quel élément du groupe des tresses ? Nous allons voir que la réponse est positive ; on peut même trouver une famille de quasi-géodésiques σ_1 -cohérentes. La deuxième question est s’il y a un lien clair entre la complexité du diagramme de courbes d’une tresse β et sa longueur (c.à.d. la longueur d’une géodésique de 1 à β dans le graphe de Cayley Γ_{B_n}). Nous verrons qu’un tel lien existe bel et bien, mais que sa nature est plutôt subtile ; en effet, il faut modifier la métrique standard sur B_n , et la remplacer par une certaine métrique non-géodésique. La question à quel point le groupe B_n , muni de cette métrique, ressemble à l’espace de Teichmüller, muni de la métrique de Teichmüller, mérite une étude plus approfondie. Il est même imaginable que le plongement de B_n (avec cette métrique) dans l’espace de Teichmüller est quasi-isométrique.

Pour donner l’idée de la stratégie, nous allons d’abord décrire l’article [123], qui est un précurseur, avec un point de vue assez naïf, de [44]. Malheureusement, les deux articles utilisent certaines notations et conventions contradictoires. Pour avoir des notations cohérentes ici, nous allons utiliser les conventions de [44], quitte à légèrement déformer le papier [123].

Pour le reste de ce chapitre, nous supposons que D_n est le disque unité dans \mathbb{C} , avec des points distingués sur la droite réelle, et que le diagramme de courbes

trivial E consiste en $n - 1$ lignes séparant les points distingués, dont chacune n'intersecte l'axe horizontale qu'une seule fois. Les tresses agiront à gauche. Si β est une tresse à n brins, alors la *complexité* du diagramme de courbes $\beta(E)$ (supposé réduit par rapport à la droite réelle \mathbb{R}) est donné par

$$\text{complexité}(\beta(E)) = \log_2(\#(\beta(E) \cap \mathbb{R})) - \log_2(\#(E \cap \mathbb{R})).$$

(Le choix d'inclure une fonction logarithme dans cette définition vient simplement du fait que le nombre d'intersections entre le diagramme des courbes et l'axe réelle a tendance à augmenter exponentiellement.) Comme famille génératrice S de B_n , on va utiliser un ensemble plus grand que celui d'Artin $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$, à savoir l'ensemble $\{\Delta_{i,j}^{\pm 1} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, où $\Delta_{i,j}$ est le "demi-twist de Dehn" qui renverse l'ordre des brins numéro $i, i + 1, \dots, j - 1, j$.

Étant donnée une tresse $\beta \in B_n$, on essaie de trouver un représentant quasi-isométrique de β par l'algorithme suivant : parmi tous les générateurs, on en choisit un dont l'action sur le diagramme de courbes $\beta(E)$ fait descendre le plus possible la complexité du diagramme. (Bien évidemment, il faut démontrer qu'il existe toujours un élément de S dont l'action fait descendre la complexité, mais ceci est assez facile.) Ayant ainsi obtenu un diagramme de courbes plus simple, on peut itérer cette procédure, jusqu'à ce qu'on se trouve avec un diagramme de courbes de complexité zéro, c'est-à-dire le diagramme trivial. Pendant le processus, on aura écrit un mot avec des lettres appartenant S , et ce mot représente la tresse β^{-1} .

Il n'est pas déraisonnable d'espérer que ce procédé rende une famille de représentants uniformément quasi-géodésiques. En effet, cet espoir semble être confirmé par des expériences sur ordinateur assez importantes. Néanmoins, il n'existe à ce jour aucune démonstration que ceci se produit toujours. Il y a un seul cas plus agréable, à savoir celui des tresses à 3 brins – en effet, l'article [123] contient une démonstration du résultat plus fort que l'algorithme, appliqué dans B_3 , trouve toujours des représentants *géodésiques*.

Il y a un détail encore plus étonnant que l'efficacité de l'algorithme décrit ci-dessus : on peut facilement modifier le procédé pour qu'il ne rende que des mots σ_1 -cohérents. Or, il semble que pour des tresses de largeur raisonnable (jusqu'à six brins) cette méthode de "relaxation contrainte" est, en moyenne, plus efficace que l'algorithme de base ! Autrement dit, bien qu'à chaque pas on ne puisse pas appliquer le générateur qui réalise la relaxation maximale, la restriction que la structure σ_1 -cohérente doit être respecté rend l'algorithme apparemment plus ciblé, prévoyant, et efficace.

Regardons ensuite l'algorithme plus évolué qui est proposé dans [44]. Cet algorithme est une adaptation à notre contexte de l'algorithme de comptage d'or-

bites de systèmes d'identifications d'intervalles qui est dû à I. Agol, J. Hass et W. Thurston [3]. Le grand avantage de cet algorithme de relaxation, par rapport à la procédure plus intuitive, est qu'on arrive à démontrer des résultats exacts sur son efficacité.

La façon la plus naturelle d'interpréter le output de cet algorithme est de s'imaginer qu'on a un système de générateurs infini, contenant les demi-tours $\Delta_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n$) et toutes leurs puissances, si bien qu'un mot dans cette famille de "générateurs" ne correspond pas à un chemin dans le graphe de Cayley de B_n , mais plutôt à une suite de sauts, où à tout endroit on peut sauter arbitrairement loin, mais que dans des directions bien précises.

Voilà l'algorithme. Étant donnée une tresse β , on calcule d'abord son diagramme de courbes. Ensuite on relie les points terminaux des arcs du diagramme deux-à-deux pour obtenir un diagramme de courbes simples fermées, et on dessine l'axe réelle sur toute la largeur du diagramme ainsi obtenu. On se trouve alors avec un certain nombre de demi-cercles dans la moitié supérieure et inférieure du plan. Finalement, on trouve la famille maximale de bandes de largeur maximale, chacune dans un demi-plan, dont les deux bouts sont collés à l'axe horizontale, et qui contiennent des demi-cercles comme courbes parallèles reliant les deux bouts. (La *largeur* d'une bande est le nombre de demi-cercles qu'il contient.) Cette opération est illustré dans la figure 8.

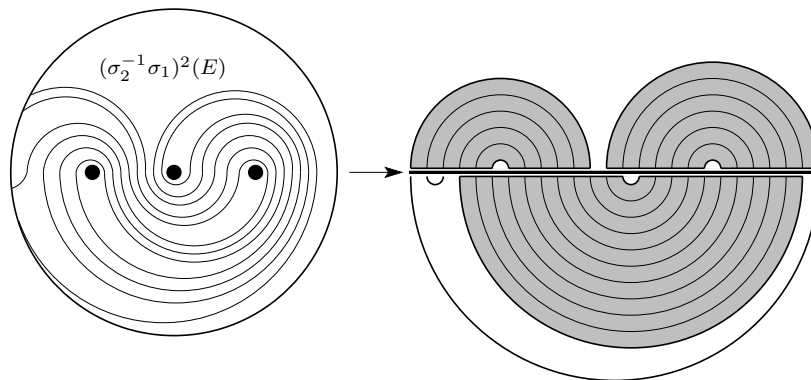


FIG. 8 – Obtenir un diagramme de bandes à partir du diagramme de courbes de la tresse $(\sigma_2^{-1}\sigma_1)^2$. Il y a deux bandes (de largeur 6 et 7) dans le demi-plan supérieur, et trois (de largeur 1, 1, et 11) dans le demi-plan inférieur.

Nous appellerons un tel dessin d'un segment de la droite réelle et d'une collection de bandes dont les bouts sont recollés au segment de droite un *diagramme de bandes*.

On s’imaginera ensuite que le segment de droite réelle est rigide, mais qu’en revanche les bandes sont fabriquées d’un matériel élastique. La stratégie est alors d’appliquer l’algorithme de Agol, Hass, et Thurston au diagramme de bandes, tout en “relaxant” le diagramme de bandes à chaque fois que c’est possible ; si l’on recopie les mouvements de relaxation du diagramme de bandes vers le diagramme de courbes, on obtient un mot de tresse qui transforme $\beta(E)$ vers le diagramme trivial E , et qui représente donc la tresse β^{-1} . Ce processus est illustré dans la figure 9.

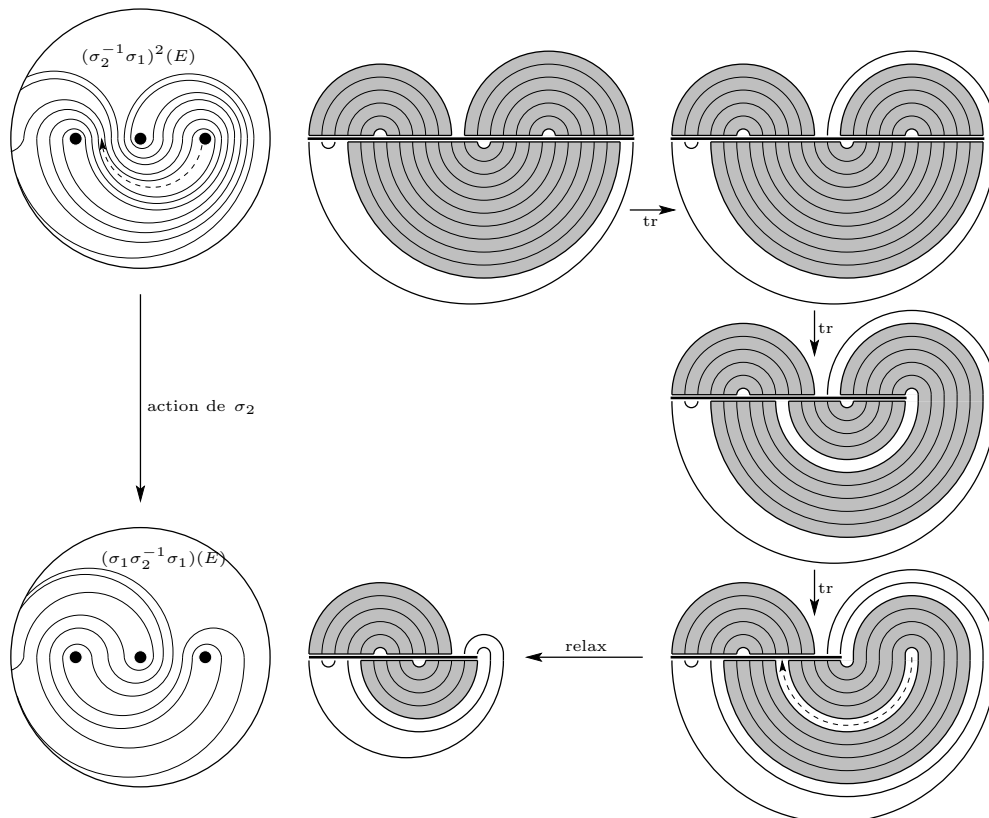


FIG. 9 – Étant donné un diagramme de courbes et son diagramme de bandes associé, on applique des *transmissions* au diagramme de bandes jusqu’à ce qu’on puisse le relaxer. La même relaxation est alors appliqué au diagramme de courbes. Ce processus est itéré jusqu’au moment où le diagramme de courbes est complètement relaxé (est égal à E).

Il y a une subtilité cruciale : si les deux bouts d’une bande se recouvrent partiellement, alors une transmission dans cette bande renvoie une bande en forme de “spirale”. Dans ce cas là, la relaxation peut se faire par l’action d’une tresse

de la forme $\Delta_{i,j}^k$, où k est un entier arbitraire, éventuellement de valeur absolue très élevé.

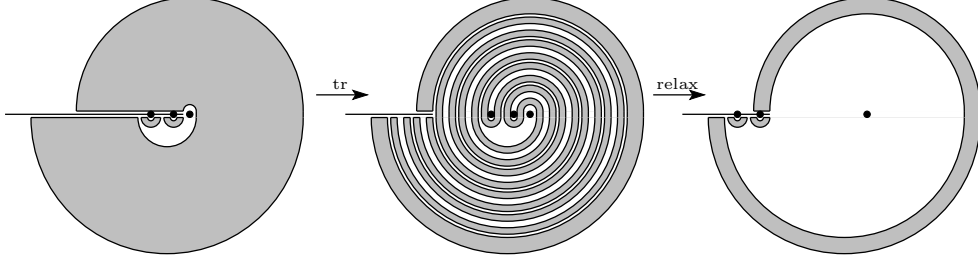


FIG. 10 – La transmission peut créer des spirales qui se relaxent par l’action d’une tresse de la forme $\Delta_{i,j}^k$, avec $|k| \gg 1$.

Ceci termine l’esquisse de l’algorithme de relaxation selon [44], qui à tout diagramme de courbes $\beta(E)$ associe un mot dans les lettres $\Delta_{i,j}^k$ qui représente β^{-1} .

L’observation clé est maintenant que chaque étape de relaxation dans cet algorithme diminue la complexité du diagramme des courbes par au moins 1, mais que la relaxation d’une “spirale” par une tresse $\Delta_{i,j}^k$ ne la diminue pas par $\sim |k|$ mais que par $\sim \log(|k| + 1)$. On est donc amené naturellement à la définition suivante.

Definition 4.4 La Δ -longueur d’un mot w de la forme $w = \Delta_{i_1 j_1}^{k_1} \dots \Delta_{i_s j_s}^{k_s}$, où $k_t \neq 0$ et $\Delta_{i_t, j_t} \neq \Delta_{i_{t+1}, j_{t+1}}$ pour tout t , est

$$\ell(w) = \sum_{i=1}^s \log_2(|k_i| + 1).$$

Pour une tresse $\beta \in B_n$ on définit

$$\ell(\beta) = \min\{\ell(w) \mid \text{le mot } w \text{ représente } \beta\}.$$

On a une métrique (invariante à droite) induite sur B_n , la Δ -métrique

$$d_\Delta(\beta_1, \beta_2) = \ell(\beta_1 \beta_2^{-1}).$$

Un des résultats principaux de [44] est

Théorème 4.5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour $\beta \in B_n$, les deux quantités $\text{complexité}(\beta(E))$ et $\ell_\Delta(\beta)$ sont comparables, au sens qu’il y a un rapport bilipschitz entre elles.

De plus, les constantes de Lipschitz sont linéaires dans n . Explicitement, on a

$$\text{complexité}(\beta(E)) \leq \log_2 3 \cdot \ell(\beta) \quad \text{et} \quad \ell(\beta) \leq 9 \cdot n \cdot \text{complexité}(\beta(E))$$

La première inégalité est assez facile à démontrer, mais pas la deuxième. Les stratégies naïves de démonstration ne semblent pas marcher. L'idée qui marche est d'utiliser l'algorithme décrit ci-dessus, et de définir (toujours en suivant Agol, Hass, et Thurston) une notion de complexité de diagrammes de *bandes*, qui diminue pendant chaque transmission. Philosophiquement, la complexité du diagramme des bandes est un raffinement de la complexité du diagramme des courbes qui permet de tenir compte, pendant tout l'algorithme de relaxation, des étapes précédentes.

L'article [44] contient aussi une version σ_1 -cohérente de l'algorithme de relaxation, qui a des propriétés semblables. La démonstration de cette version σ_1 -cohérente du théorème 4.5 est encore plus technique que celle du théorème de base, mais en revanche elle est cruciale pour la démonstration du théorème suivant, qui était promis dans l'introduction :

Théorème 4.6 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $\lambda \geq 1$ et $\epsilon \geq 0$ telles que toute tresse $\beta \in B_n$ peut être représentée par un mot (avec les lettres $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$) qui est σ_1 -cohérent et une λ, ϵ -quasi-géodésique.*

Bien évidemment, ce résultat serait trivial si l'on comprenait bien l'algorithme de réduction de poignées de Dehornoy ; en effet, si l'on applique cet algorithme à des représentants géodésiques de tresses $\beta \in B_n$, on obtient *apparemment* une famille uniforme de quasi-géodésiques σ_1 -cohérentes.

La clé pour la démonstration est l'idée d'interpréter des diagrammes de bandes comme des instructions à construire des réseaux ferroviaires (train tracks, en anglais) sur le disque à n trous, et des transmissions comme des scindements de réseaux ferroviaires (train track splittings). On obtient ainsi une suite de scindements de réseaux ferroviaires, ce qui est, grâce à un théorème de Hamenstädt, une quasi-géodésique.

On a donc la situation assez remarquable que l'algorithme de relaxation fournit deux choses : premièrement une suite de "sauts" dans B_n , muni de la Δ -métrique, et deuxièmement un chemin (qui est une "sous-division naturelle" de la suite de sauts), dans B_n , muni de la métrique standard ; et en plus les deux trajets sont à peu près aussi courts que possible, chacun dans sa classe. Dit de façon très simplifiée, on a trouvé *une* famille de chemins qui sont courts dans les *deux* métriques, la Δ -métrique et la métrique standard.

4.3 Questions ouvertes

Plusieurs questions très intéressantes en rapport avec les travaux mentionnés dans ce chapitre restent ouverts.

Tout d’abord, la Δ -métrique sur B_n a-t-elle un sens plus profond ? Jason Behrstock a suggéré que le plongement de B_n dans l’espace de Teichmüller, muni de la métrique de Teichmüller, pourrait être quasi-isométrique si B_n est muni de la Δ -métrique. Ceci serait analogue au cas de la métrique de Weil-Petersson sur l’espace de Teichmüller d’une surface S , qui est quasi-isométrique à $\mathcal{MCG}(S)$ avec toutes les classes de la forme $\beta\{\Delta_{i,j}^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ écrasées pour avoir une diamètre de 1 [18, 19].

Une question très naturelle concerne l’existence de résultats semblables pour des groupes d’homéotopies $\mathcal{MCG}(S)$ pour des surfaces S autre que le disque à n trous. La réponse est très probablement positive.

Est-ce que les deux notions de longueur de tresses (la notion habituelle et la Δ -longueur) coïncident génériquement, à un facteur linéaire près ? C’est à dire, existe-t-il une constante $C > 0$ telle que l’affirmation suivante est vraie : si w est un mot de tresse infini aléatoire, et w_m (avec $m \in \mathbb{N}$) son segment initial de longueur m , a-t-on

$$\frac{\ell_{\Delta}(w_m)}{\ell(w_m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} C \quad \text{“avec probabilité 1” ?}$$

5 Groupes de tresses, ordres, et groupes de diagrammes

Dans ce chapitre, nous discutons les groupes de diagrammes au sens de Guba et Sapir [69], et en particulier le groupe F de Richard Thompson. Nous allons voir comment un lien avec la théorie des tresses permet de démontrer que tous les groupes de diagrammes sont ordonnables à gauche, et nous allons spéculer sur d’autres applications possibles de ce lien. Cette section est basée sur les articles [124, 23].

5.1 Groupes de diagrammes

Les groupes de diagrammes forment une large classe de groupes, définie pour la première fois par Meakin et Sapir [95], et dont l’exemple le plus important est le groupe F de Richard Thompson. Pour les définir, on rappelle d’abord qu’une présentation de semigroupe $\mathcal{P} = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ est la donnée d’un ensemble fini Σ (les “générateurs”, ou simplement les “lettres”), et d’un ensemble fini $\mathcal{R} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ dont les éléments sont des règles de réécriture de mots de la forme $q \xrightarrow{\Delta_i} q'$, où q et q' sont des mots dans l’alphabet Σ . Le semigroupe \mathcal{P} est

alors l'ensemble des mots dans l'alphabet Σ , modulo la congruence engendrée par \mathcal{R} ; la multiplication est donnée par concaténation.

Si w' et w'' sont deux mots, on dit qu'un (w', w'') -*diagramme* est une suite finie de mots qui commence par w' et se termine par w'' , et où chaque élément est obtenu de son prédécesseur par l'application d'une réécriture de sous-mots $\Delta_i: q_i \rightarrow q'_i$ ou son inverse Δ_i^{-1} . On appelle q_i le *haut* et q'_i le *bas* de la cellule Δ_i , notés $\mathbf{haut}(\Delta_i)$, $\mathbf{bas}(\Delta_i)$. On utilise la convention $\mathbf{haut}(\Delta_i^{-1}) = q'_i$, $\mathbf{bas}(\Delta_i^{-1}) = q_i$. Graphiquement, on peut représenter un diagramme par un dessin en forme de lentille, qui est elle-même composée d'autant de petites lentilles (les "cellules") qu'il y a de réécritures dans le diagramme. Le haut du diagramme est divisé en longueur(w') segments, étiquetés par les lettres de w' , et de même pour le bas du diagramme et le mot w'' . Les cellules sont étiquetés par les réécritures.

On va imposer une relation d'équivalence sur l'ensemble des (w', w'') -diagrammes, qui est très naturelle du point de vue graphique. Cette relation d'équivalence sera engendrée par les deux équivalences suivantes. Premièrement, une suite $q \xrightarrow{\Delta_i^{\pm 1}} q' \xrightarrow{\Delta_i^{\mp 1}} q$ peut être remplacée par q . Graphiquement, deux lentilles inverses adjacentes peuvent être annulées. Et deuxièmement, des cellules distantes commutent. Plus exactement, on ne distingue pas

$$\begin{aligned} w_0 q_1 w_1 q_2 w_2 &\xrightarrow{\Delta_1} w_0 q'_1 w_1 q_2 w_2 \xrightarrow{\Delta_2} w_0 q'_1 w_1 q'_2 w_2 \text{ et} \\ &w_0 q_1 w_1 q_2 w_2 \xrightarrow{\Delta_2} w_0 q_1 w_1 q'_2 w_2 \xrightarrow{\Delta_1} w_0 q'_1 w_1 q'_2 w_2 \end{aligned}$$

Enfin, on définit le groupe de diagrammes $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ comme le groupe des classes d'équivalence de (w, w) -diagrammes, où la multiplication est donnée par concaténation.

Exemple 5.1 (a) \mathbb{Z}^2 est isomorphe au groupe de diagrammes

$$\mathcal{D}(\langle a, b \mid a \rightarrow a, b \rightarrow b \rangle, ab)$$

(b) Le groupe libre F_2 est isomorphe au groupe de diagrammes

$$\mathcal{D}(\langle a, b, c \mid ab \rightarrow ab, bc \rightarrow bc \rangle, abc)$$

(c) Le célèbre groupe F de Richard Thompson peut être défini comme le groupe de diagrammes

$$\mathcal{D}(\langle a \mid a \rightarrow aa \rangle, a).$$

Il y a, bien sûr, d'autres définitions équivalentes. Par exemple, notre interprétation graphique rend assez évident le fait que F est aussi le groupe fondamental de

chacune des deux composantes connexes de l'espace des lacets non homotopes à la boucle triviale sur le bonnet d'âne ("dunce hat" en anglais). Encore une autre définition équivalente est que F est le groupe des homéomorphismes linéaires par morceau de l'intervalle $[0, 1]$ tels que tous les pentes visibles dans leur graphes sont des puissances de 2, et tels que les points de non-dérivabilité dans $[0, 1]$ sont des entiers dyadiques. Historiquement, le groupe T de Thompson (dont la définition n'est qu'une légère variation de celle de F) était le premier exemple connu d'un groupe infini simple.

Ce groupe a des propriétés très subtiles, et plusieurs questions assez fondamentales concernant ce groupe sont encore ouvertes. Par exemple, on ne sait pas si F est automatique ; on sait que la croissance est exponentielle, mais pour le taux de croissance n'est pas connu – on ne connaît qu'une borne inférieure. La question la plus célèbre, sur laquelle nous reviendrons plus tard, est si F est moyennable.

(d) Le groupe de diagrammes universel est un groupe très remarquable dont la découverte [71] avait lieu simultanément à la recherche qui menait vers l'article [124]. Il s'agit, par définition, du groupe de diagrammes

$$\mathcal{D}(\langle a \mid a \rightarrow aa, a \rightarrow a \rangle, a).$$

Guba et Sapir [71] ont démontré que ce groupe est universel dans le sens qu'il contient tous les groupes de diagrammes comme sous-groupes. De plus, il est un produit semidirect de F avec un certain groupe A , qui a un nombre dénombrable de générateurs et dont tous les relations sont des relations de commutation entre générateurs (A est un group "partiellement commutatif"). En plus, l'action de F sur A est très contrôlée : elle envoie les générateurs de A sur des générateurs de A , et cette action préserve même un certain ordre sur l'ensemble des générateurs de A . On en déduit qu'il existe un bi-ordre sur A qui est préservé par l'action de F . Il est bien-connu que le groupe F , lui aussi, est bi-ordonnable.

Ainsi on obtient que le groupe des diagrammes universel, et avec lui tous les groupes de diagrammes, sont bi-ordonnables. Le lecteur attentif remarquera que ceci est plus fort que le résultat principal (théorème 5.2) de cette partie. Néanmoins, les résultats de structure obtenus au cours de la démonstration du théorème 5.2 sont d'un intérêt indépendant. Une application potentielle sera présentée à la fin de ce chapitre.

La plupart des résultats connus sur les groupes de diagrammes sont dus à Guba et Sapir [69, 71, 72, 73, 74], mais aussi à Kilibarda [85] et Farley [51]. Ainsi le problème de conjugaison dans un groupe de diagrammes est résoluble.

Tout groupe de diagrammes G satisfaisant une certaine condition technique assez faible (finitude du semigroupe apparaissant dans la présentation), agit proprement, librement, et de façon cellulaire sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$; un tel groupe G est de type \mathcal{F}_∞ (ce qui veut dire qu'il possède un $K(G, 1)$ avec un nombre fini de cellules en chaque dimension). Les groupes d'homologie d'un groupe de diagrammes G est sans torsion, et si G est de type \mathcal{F}_∞ , alors sa série de Poincaré est rationnelle. Si la dimension homologique de G est $\geq n$, alors G doit contenir un sous-groupe \mathbb{Z}^n . La classe des groupes de diagrammes est fermé sous produits et produits libres (et en fait sous une famille d'opérations très générale, qui s'appelle produits diagrammatiques). En revanche, un sous-groupe H d'un groupe de diagrammes G n'est, en général, pas un groupe de diagrammes, sauf si H est "fermé" (une autre condition assez technique). Tout sous-groupe nilpotent d'un groupe de diagrammes est abélien. Un groupe de diagrammes contient un groupe de Thompson F si et seulement si son complexe de présentation contient un bonnet d'âne. Enfin, on a les résultats sur l'existence de groupe de diagrammes universelles, de type \mathcal{F}_∞ mentionnés précédemment.

5.2 Plongement de groupes de diagrammes dans un groupe de tresses

On va plonger tout groupe de diagrammes dans un certain groupe de tresses avec une infinité de brins \mathcal{B} , qui est ordonnable à gauche. Il s'agit du groupe de tresses (satisfaisants une certaine condition de non-méchanceté) dans le quart de plan $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}_+\}$ avec des brins aux positions $\{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}_+\}$. La description détaillée et la démonstration d'injectivité de ce plongement sont très techniques.

L'idée, en revanche, est assez simple. On va spécifier l'image de chaque cellule. Si $w_0qw_1 \xrightarrow{\Delta} w_0q'w_1$ est une cellule, où le mot w_0 est de longueur ℓ_0 , et les mots q et q' sont de longueur L et L' , respectivement, alors l'image dans \mathcal{B} de cette cellule aura les propriétés suivantes :

- Tous les brins dans les ℓ_0 premières colonnes (en position (n, m) avec $n \leq \ell_0$) sont verticaux (c'est-à-dire ne bougent pas).
- L'ensemble des brins dans les colonnes $\ell_0 + L + 1, \ell_0 + L + 2, \dots$ est déplacé de façon rigide $L' - L$ positions à droite.
- Les brins dans les colonnes numéro $\ell_0 + 1, \dots, \ell_0 + L$ sont redistribués, par une tresse $\Phi(\Delta)$ sur les colonnes $\ell_0 + 1, \dots, \ell_0 + L'$.

Il faut choisir les tresses $\Phi(\Delta_i)$, pour $i = 1, \dots, r$, de façon assez différente pour assurer que dans la famille de tresses formé par les $\Phi(\Delta_i)$ et tous leurs translatés dans la direction horizontale il n'y a aucune relation. Pour ceci on

peut utiliser les raffinements remarquables du “lemme de ping-pong” trouvés par N. V. Ivanov. De cette façon, on obtient un homomorphisme injectif du groupe de diagrammes vers le groupe de tresses \mathcal{B} .

En utilisant une notion de diagrammes de courbes tout à fait comparable avec celle considérée dans la section 2, on arrive à démontrer que le groupe de tresses \mathcal{B} est ordonnable à gauche. En particulier, on obtient que :

Théorème 5.2 *Tout groupe de diagrammes est ordonnable à gauche.*

5.3 (Non-)moyennabilité du groupe de R. Thompson

Dans cette partie, nous présentons des résultats expérimentaux concernant la question célèbre suivante : ”Le groupe F de Thompson est-il moyennable ?”, et nous spéculons que les techniques du chapitre précédent pourraient être utilisées pour démontrer une réponse négative. Les deux réponses seraient intéressantes, car F est soit un groupe moyennable mais non élémentairement moyennable, soit un groupe non-moyennable mais sans sous-groupe libre.

Il y a une abondance de définitions équivalentes de la propriété de moyennabilité. Nous n’en donnerons que deux – pas les plus connues, mais celles qui serviront pour ce qui suit.

Soit G un groupe de type fini (i.e. il existe une famille génératrice finie). Le premier critère, probabiliste, est dû à Kesten [83, 84]. Pour $L \in 2\mathbb{N}$ soit

$$\begin{aligned} pL &= P(\text{un mot aléatoire de longueur } L \text{ dans les générateurs représente } 1_G) \\ &= P(\text{deux mots aléatoires de longueur } L/2 \text{ représentent le même élément} \\ &\quad \text{de } G), \end{aligned}$$

où P note la probabilité. Alors G est non-moyennable

si et seulement si pL décroît de façon exponentielle avec L , c.à.d,

$$\text{si et seulement si } \exists a \in]0, 1[\text{ tel que } pL = O(c \cdot a^L).$$

Donc Γ est moyennable si et seulement si pL décroît plus lentement que toute fonction exponentielle.

La deuxième caractérisation est que G est non-moyennable si et seulement s’il est paradoxal au sens de Banach-Tarski. Ceci revient à dire [34, 121] qu’il existe une partition finie

$$G = G_1 \cup \dots \cup G_m$$

et $2m$ éléments $g_1^+, g_1^-, \dots, g_m^+, g_m^-$ tels que pour $i = 1, \dots, m$ on a

$$g_i^\pm G_i \subset G_i \quad \text{et} \quad g_i^+ G_i \cap g_i^- G_i = \emptyset.$$

Pour les groupes G pour lesquels on a une solution du problème des mots, le critère de Kesten se prête parfaitement à une approche de type Monte Carlo : on engendre, par exemple, 140000 mots aléatoires de longueur $\frac{L}{2}$, et, après avoir réécrit chacun en forme normale, on compte combien de couples de mots, parmi tous les $140000 \cdot 139999/2$ couples, représentent le même élément de G . Cette fraction est une approximation expérimentale de pL ; en répétant cette procédure quelques milliers de fois, et en prenant la moyenne des valeurs approximatives de pL obtenues, on peut engendrer des approximations de pL qui sont sujet à des erreurs expérimentales arbitrairement petites.

J. Burillo, S. Cleary, et moi [23] ont utilisé des moyens de calcul très importants (plusieurs semaines sur le cluster d'ordinateurs "Wildebeest" du City college à New York) pour appliquer cette stratégie au groupe F de R. Thompson. Pour fournir un cadre de référence, la même stratégie a été appliquée au groupe libre F_2 (dont on sait qu'il est non-moyennable) et au groupe $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, dont on sait qu'il est moyennable et qui, en plus, est contenu dans chaque sous-groupe non-abélien de F [16, 24].

La figure 11 montre les résultats de ces calculs. La figure 11(a) montre la suite $\sqrt[p]{pL}$, pendant que figure 11(b) montre la suite $\sqrt[20]{\frac{pL}{p(L-20)}}$. On sait que les deux suites ont la même limite – à savoir 1 si F est moyennable, et un réel $a < 1$ si F n'est pas moyennable. La question si F est moyennable revient donc à la question si les deux graphes tendent vers 1 ou vers un réel inférieur à 1. À mon avis, les graphiques soutiennent l'hypothèse que F n'est pas moyennable.

Le plongement du groupe F de R. Thompson dans le groupe de tresses \mathcal{B} pourrait s'avérer très important, car l'action de F sur le quart-de-plan, privé du réseau des points entiers, permet de définir de façon élégante une grande richesse de sous-ensembles de F . La capacité de définir des sous-ensembles intéressants de F est, bien sûr, précieuse quand on essaie de démontrer que le groupe F admet une décomposition paradoxale. Notre spéculation est donc qu'on pourrait profiter du plongement de $\Phi: F \rightarrow \mathcal{B}$ pour démontrer la non-moyennabilité de F .

6 Plats dans le groupe des tresses

Dans ce chapitre, qui est basé sur l'article [66], nous essaierons de mieux comprendre la nature des plats $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans le graphe de Cayley du groupe des tresses

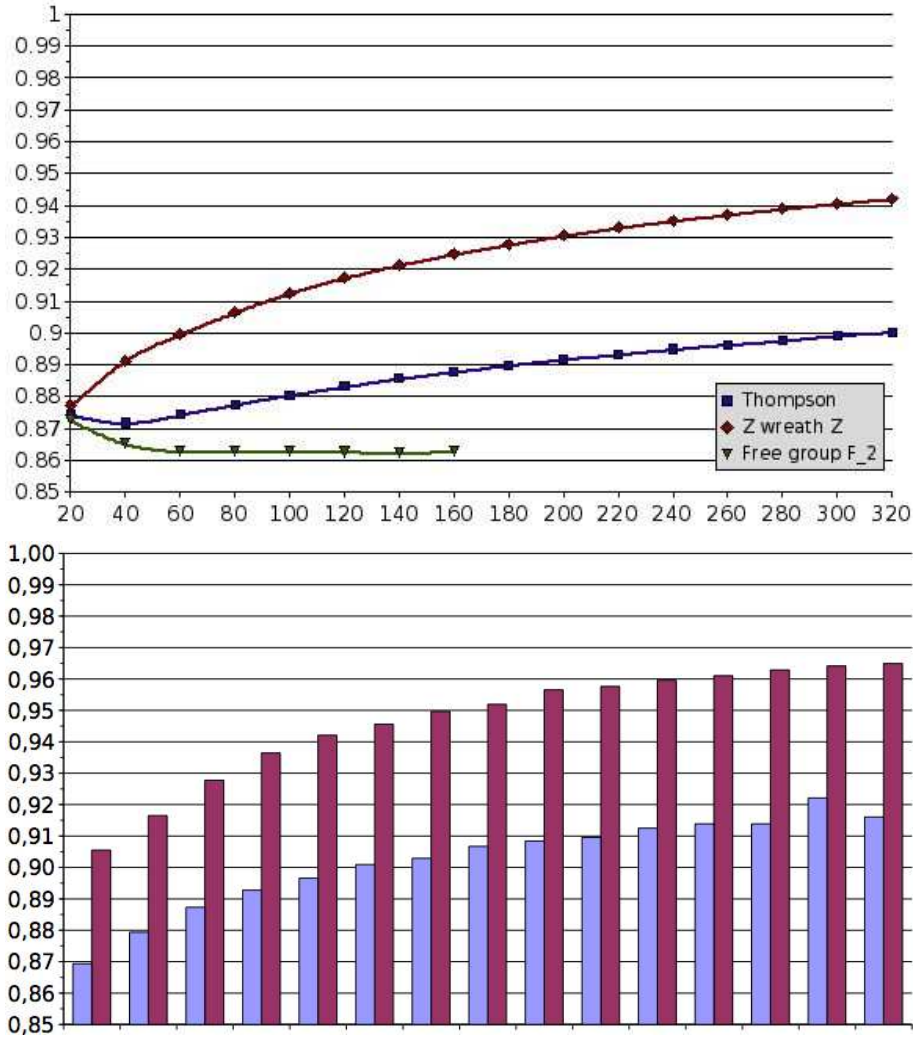


FIG. 11 – (a) Comparaison des estimations de $\sqrt[l]{\hat{p}(L)}$ pour trois groupes. (b) Comparaison des estimations de $\sqrt[20]{\frac{\hat{p}(L)}{\hat{p}(L-20)}}$ pour F et $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.

B_n . Autrement dit, nous allons étudier la question suivante : quels couples de tresses commutent ? Plus généralement, étant donnée une tresse β , nous allons essayer de décrire explicitement le centralisateur

$$Z(\beta) = \{\gamma \in B_n \mid \gamma\beta = \beta\gamma\}$$

de β . Un but supplémentaire est de fournir des algorithmes qui permettraient à un ordinateur d’achever ces tâches.

Nous réussissons à donner une description de la structure du centralisateur de n’importe quelle tresse. De plus, nous allons fournir un système de générateurs qui est très compact (il a le nombre minimal d’éléments parmi toutes les familles génératrices possibles, à quelques exceptions embêtantes près), et qui correspond à notre intuition. De plus, la description du groupe $Z(\beta)$ et de son système de générateurs d’une tresse donnée β peuvent, en principe, être trouvés automatiquement, par des algorithmes que nous allons décrire. Bien évidemment, on va faire largement usage des algorithmes existants, comme celui de Garside (dans les versions de El Rifai–Morton [47], Gebhardt [61] et de Birman–Ko–Lee [12]), et des algorithmes effectuant la classification de Nielsen–Thurston [10, 17, 92].

Intuitivement parlant, on verra que pour une tresse β “générique” (donnée par un “très long” mot aléatoire dans les générateurs $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_n^{\pm 1}$), le commutateur de β est en fait isomorphe à \mathbb{Z}^2 , et engendré par les deux éléments “évidents” de $Z(\beta)$, à savoir β et Δ^2 . Néanmoins, dans certains cas il peut arriver qu’un nombre de générateurs beaucoup plus important est nécessaire pour engendrer tout le sous-groupe $Z(\beta)$. Cependant, nous allons démontrer l’existence d’une borne sur le nombre de générateurs nécessaires qui ne dépend que du nombre de brins n et qui est de classe $O(n^2)$. Cette borne est optimale.

Il faut insister sur le fait que le centralisateur $Z(\beta)$, même s’il est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , n’est, pour autant que nous sachions, pas un plat du graphe de Cayley Γ_{B_n} dans le sens qu’il s’agirait d’un plan euclidien plongé de façon quasi-géodésique dans Γ_{B_n} . La question si l’homomorphisme d’inclusion du sous-groupe $Z(\beta)$ dans B_n est quasi-isométrique mériterait sans doute une autre étude approfondie.²

Concernant l’histoire du problème abordé dans ce chapitre nous remarquons que Makanin [93] avait, en 1971 donné une solution “pré-Nielsen-Thurston” à notre

²Dans son rapport sur ce document, Lee Mosher m’informe que cette question n’est, en fait, pas ouverte : la réponse est positive, et la démonstration est, selon lui, une application immédiate de la technologie développée dans l’article [94]. Hamish Short m’a signalé une autre façon d’obtenir ce résultat : selon [62], dans des groupes bi-automatiques le centralisateur de tout élément est un sous-groupe quasi-convexe.

problème. Plus exactement, il avait fourni un algorithme qui trouve un système de générateurs fini du centralisateur de toute tresse donnée. Or, sa méthode engendrait des systèmes de générateurs extrêmement redondants (souvent avec des milliers d'éléments), qui, de plus, n'avait pas de signification géométrique très claire. Nous remarquons que la machinerie de Nielsen-Thurston [119] est parfaitement adaptée au problème, et améliore considérablement les résultats de Makanin. Il est étonnant que cette remarque n'a pas été faite plus tôt par les spécialistes du domaine, les travaux de Thurston datant de 1988. Une raison possible est que les détails des démonstrations, voire des énoncés, sont assez techniques et laborieux, et ne découlent pas directement d'une bonne intuition générale pour la théorie de Nielsen-Thurston.

Dans tout ce chapitre on supposera que le lecteur a un “working knowledge” de la théorie de Nielsen-Thurston. Pour des explications et démonstrations détaillées, le lecteur peut consulter [54] et [25]. Ici, nous nous contenterons de rappeler que tout automorphisme φ du disque à n trous fixant le bord satisfait, éventuellement après une isotopie, exactement une des propriétés suivantes :

- φ est pseudo-Anosov. Dans ce cas là, φ préserve les feuilletages sous-jacentes à deux feuilletages singuliers mesurés sur le disque D_n , tout en dilatant les mesures transverses par un facteur réel λ (l'entropie de φ) et sa réciproque $\frac{1}{\lambda}$, respectivement.
- φ est périodique. Ceci veut dire qu'une puissance convenable de φ est isotope à une autre puissance convenable de Δ^2 . Plus intuitivement, la tresse représentée par φ est périodique dans le groupe $B_n/\langle\Delta^2\rangle$.
- φ est réductible non-périodique. Dans ce cas là, il existe un certain système fini, canoniquement associé à φ , de courbes dans D_n qui est stabilisé par φ . (On remarque que, dans un certain sens qu'on ne va pas spécifier, “presque toutes” les tresses sont pseudo-Anosov.)

6.1 Exemples et résultats simples

Commençons notre étude avec quelques observations et exemples très simples.

Observation 6.1 Toute tresse β commute avec elle-même et avec le “tour complet” Δ^2 . Si la tresse β a une racine, c'est-à-dire s'il existe une tresse α et un entier positif p tels que $\alpha^p = \beta$, alors $Z(\beta)$ contient même l'élément α . Donc, sauf dans le cas spécial où β et Δ^2 appartiennent à un même sous-groupe cyclique de B_n (c'est-à-dire sauf si β est périodique), on obtient tout de suite que $Z(\beta)$ contient un sous-groupe \mathbb{Z}^2 .

Observation 6.2 Soit 1_{B_n} l'élément neutre de B_n (la tresse triviale). Alors $Z(1_{B_n}) = B_n$. De façon semblable, $Z(\Delta^2) = B_n$. Dans ces cas là, aussi, deux éléments suffisent pour engendrer le centralisateur – par exemple, les deux tresses σ_1 et δ ; ici, δ note la tresse de Birman-Ko-Lee, ce qui est l'unique tresse avec $n - 1$ croisements induisant la permutation cyclique $(1\ 2\ \dots\ n)$.

Il est instructif de comparer le nombre de générateurs du groupe B_n (deux) avec le nombre d'éléments nécessaires pour engendrer le groupe des tresses pures PB_n . Pour tout couple (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$ on a un homomorphisme $PB_n \rightarrow \mathbb{Z}$, donné par le nombre d'enlacement. Ainsi on obtient un homomorphisme $PB_n \rightarrow \mathbb{Z}^{n(n-1)/2}$, et on voit facilement qu'il s'agit d'une surjection. Donc toute famille génératrice a au moins $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ éléments, et il est bien connu que ce nombre est suffisant.

Observation 6.3 Si l'on comprend le centralisateur d'une tresse β , alors on comprend aussi le centralisateur de toute tresse conjuguée à β . Plus exactement, le centralisateur d'un conjugué d'une tresse β est conjugué au centralisateur de la tresse β originale :

$$Z(\gamma^{-1}\beta\gamma) = \gamma^{-1}Z(\beta)\gamma.$$

Observation 6.4 Comme indiqué précédemment, à toute tresse réductible β on associe un système de courbes de réduction canonique; et à toute tresse pseudo-Anosov β , on associe un feuilletage singulier mesuré projectif canonique. Nous remarquons que si une tresse γ commute avec β , alors l'action de γ sur le disque D_n doit préserver le système de courbes (respectivement le feuilletage mesuré projectif) associé à β .

Cette observation quasiment triviale est à la base de tous les résultats de ce chapitre.

6.2 Le cas périodique

Exemple 6.5 Dans le groupe B_{12} on regardera la tresse $\beta = \delta^3$ (figure 12 – on va considérer ici que les douze points distingués de D_{12} sont régulièrement espacés sur un *cercle*, pas sur une droite comme il est plus habituel). On remarque qu'une tresse ζ commute avec β si et seulement si l'homéomorphisme de D_{12} associé à ζ est symétrique par rapport à la rotation de D_{12} par $3 \cdot \frac{2\pi}{12}$.

Pour étudier l'ensemble de tresses ayant une telle symétrie, on va considérer le revêtement de degré 4 ramifié au centre du disque

$$\theta_4: D_{12} \rightarrow D_3.$$

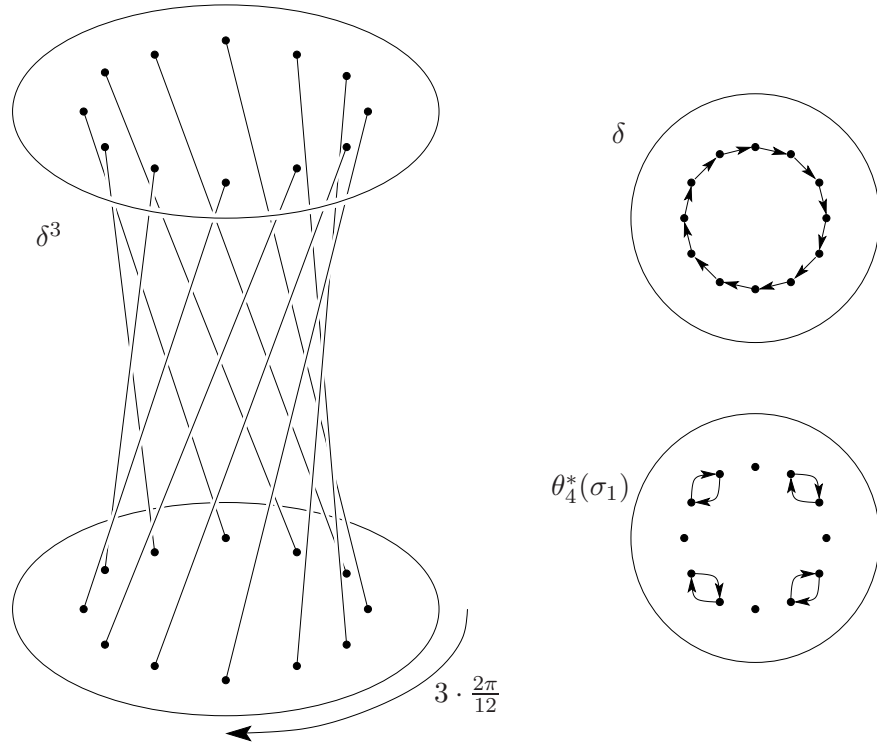


FIG. 12 – La tresse $\delta^3 \in B_{12}$ et les deux générateurs de $Z(\delta^3)$: δ et $\theta_4^*(\sigma_1)$

Toute tresse à 3 brins dont les brins évitent toujours le centre du disque, se relève à une tresse à 12 brins qui est symétrique par rapport à la rotation par $3 \cdot \frac{2\pi}{12}$. En fait, toute tresse satisfaisant la condition de symétrie s'obtient de cette façon ; on conclut que $Z(\delta^3)$ est isomorphe au groupe des tresses à trois brins dans l'anneau $D^2 \setminus \{\text{point central}\}$. En plus, on en déduit que notre centralisateur est engendré par les deux tresses δ et $\theta_4^*(\sigma_1)$ également indiquées dans la figure 12. Plus généralement :

Proposition 6.6 *Pour le centralisateur de δ^p dans B_n il y a trois possibilités :*

- Si $p \equiv 0 \pmod{2n}$, alors $Z(\delta^p) = B_n$.
- Si $\text{pgcd}(p, n) = 1$, alors $Z(\delta^p)$ est engendré par δ et isomorphe à \mathbb{Z} .
- Dans tous les autres cas, $Z(\delta^p)$ est isomorphe au groupe des tresses à $\text{pgcd}(p, n)$ brins dans un anneau ; en particulier, $Z(\delta^p)$ est engendré par deux éléments.

Exemple 6.7 Il y a un autre exemple important de tresse périodique, à savoir la tresse γ qui est égale à la tresse δ , sauf qu'il y a un brin au centre du disque.

Pour le commutateur de γ^p une analyse tout à fait semblable s'applique. En particulier on trouve

Proposition 6.8 *Le commutateur de γ^p est isomorphe à un groupe de tresses dans un anneau. Il est engendré par au plus deux éléments.*

Bien que ça puisse paraître surprenant, notre analyse des centralisateurs de tresses périodiques est déjà complète, grâce au résultat suivant, dû à Eilenberg [45] et de Kerékjártó [33, 28] :

Proposition 6.9 (Eilenberg, de Kerékjártó) *Toute tresse périodique est conjuguée à une puissance de δ ou de γ .*

En ce qui concerne les questions algorithmiques, la situation ne présente aucune difficulté dans le cas périodique. Ainsi, nous allons présenter une méthode facile pour décider si une tresse donnée β est périodique :

Soit $se(\beta)$ la somme des exposants de β . On rappelle que $se(\Delta^2) = n(n-1)$. Soit k le plus petit entier tel que $k \cdot se(\beta)$ est un multiple de $n(n-1)$ – on a alors un entier m tel que $k \cdot se(\beta) = m \cdot n(n-1)$. La tresse β est périodique si et seulement si $\beta^k = \Delta^{2m}$.

6.3 Le cas pseudo-Anosov

Supposons que β est une tresse pseudo-Anosov ; on rappelle qu'associé à β on a, de façon canonique, un feuilletage mesuré projectif stable et un autre instable.

Si ζ est une tresse réductible non-périodique, alors ζ ne commute pas avec β , car l'action de β sur D_n ne peut pas préserver les courbes du système de réduction de ζ . (L'action d'une tresse pseudo-Anosov sur D_n ne préserve aucune courbe simple fermée.) Donc $Z(\beta)$ ne contient que des tresses pseudo-Anosov et périodiques.

Regardons ensuite les éléments périodiques dans $Z(\beta)$. Bien sûr, la tresse Δ^2 y appartient, mais pour certaines tresses β il arrive qu'une racine de Δ^2 (donc une tresse conjuguée à une puissance de δ ou de γ , par la proposition 6.9) y appartient, aussi.

Exemple 6.10 $\beta = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1}$ est une tresse pseudo-Anosov qui commute non seulement avec Δ^2 , mais aussi avec Δ .

Donc, dans le groupe $B_n/\langle\Delta^2\rangle$, l'ensemble des éléments périodiques commutant avec $\bar{\beta}$ est un sous-groupe qui peut être non-trivial. Néanmoins, un argument plus subtil portant sur la symétrie des feuilletages stables et instables, et qui ne s'étend apparemment pas au cas des surfaces autres que D_n , permet d'assurer que ce groupe est cyclique fini. C'est à dire, il existe un élément périodique $\rho \in Z(\beta)$ tel que tout élément périodique de $Z(\beta)$ est une puissance de ρ .

Tous les éléments pseudo-Anosov de $Z(\beta)$ ont les mêmes feuilletages projectives stables et instables que β . Parmi ces éléments, on peut en choisir un, qu'on notera α , dont l'entropie est minimale (> 1). (Souvent, on a $\alpha = \beta$, mais il peut arriver que α est une racine de β , ou de $\beta\rho^k$, où $k \in \mathbb{Z}$.) Ensuite, il n'est pas difficile de démontrer que ρ et α engendrent $Z(\beta)$, et on a :

Proposition 6.11 *Si β est pseudo-Anosov, alors $Z(\beta)$ est engendré par un élément pseudo-Anosov α et un élément périodique ρ . On a $Z(\beta) \cong \mathbb{Z}^2$.*

D'un point de vue algorithmique, le cas de β pseudo-Anosov pose plusieurs problèmes intéressants. D'abord, pour décider si une tresse β est pseudo-Anosov, on peut utiliser les algorithmes standards de la théorie de Nielsen-Thurston [10, 17, 92].

Ensuite, pour tester si une tresse β possède une conjuguée qui commute avec une puissance de δ , on utilise l'observation suivante : si une telle conjuguée existe, alors il y en a au moins une qui appartient à l'ensemble super-sommital ("super summit set") de β dans l'algorithme de Birman-Ko-Lee (et en fait même à l'ensemble hyper-sommital de Gebhardt [61]). Avec une petite astuce supplémentaire, on peut aussi tester si une conjuguée de β commute avec une puissance de γ .

Un troisième ingrédient nécessaire pour trouver des générateurs de $Z(\beta)$ est un algorithme dû à Sibert [115] qui trouve toutes les racines d'une tresse donnée.

6.4 Le cas réductible

Ceci est le plus technique des trois cas, et nous éviterons d'entrer dans les détails. Mais c'est aussi le cas le plus riche, où l'on a toujours besoin de plus de deux générateurs pour engendrer $Z(\beta)$. Supposons que β est une tresse réductible mais pas périodique, avec système de réduction $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$. Ici $m > 0$, et les courbes C_i dans D_n sont simples et mutuellement disjointes.

Après une conjugaison, on peut supposer que les courbes de réduction sont rondes. D'une façon évidente, la tresse β détermine alors une tresse "tubulaire"

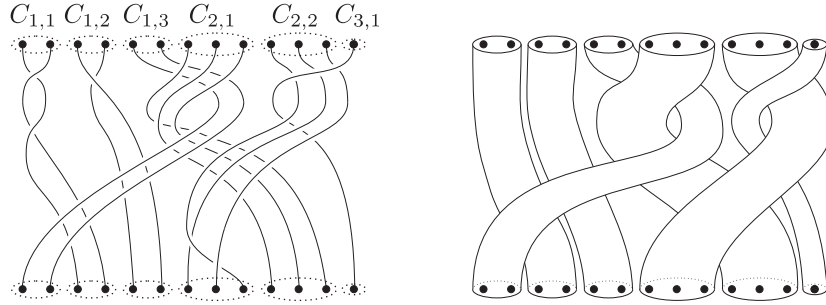


FIG. 13 – Exemple d’une tresse réductible à 13 brins, et sa tresse tubulaire correspondante $\widehat{\beta}$.

$\widehat{\beta}$ avec m brins (on peut penser que ce sont des “gros brins”), ainsi que m tresses $\beta_{[1]}, \dots, \beta_{[m]}$ “intérieures” aux tubes. Il est évident qu’en général, les centralisateurs de $\widehat{\beta}$ et $\beta_{[i]}$ vont jouer un rôle dans la description de $Z(\beta)$.

Exemple 6.12 Figure 14 donne l’exemple d’une tresse β à $2m$ brins (avec $m > 1$) qui est réductible, dont la tresse tubulaire associée $\widehat{\beta}$ est la tresse triviale à m brins. Les m tresses intérieures sont deux-à-deux non-conjuguées. De plus, le centralisateur de chacune des k tresses intérieures est isomorphe à \mathbb{Z} .

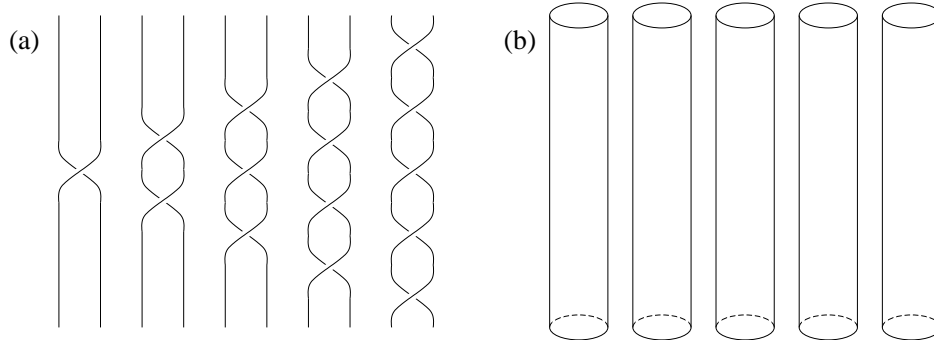


FIG. 14 – (a) La tresse $\beta = \sigma_1 \sigma_3^2 \dots \sigma_{2m-1}^k$ – ici $m = 5$. (b) La tresse tubulaire $\widehat{\beta}$ associée est triviale, avec m brins.

Si ζ est donc une tresse qui commute avec β , alors l’action de ζ sur D_{2m} préserve \mathcal{C} , l’ensemble des courbes de réduction. La tresse ζ est donc elle-même réductible. Comme les m tresses intérieures sont mutuellement non-conjuguées, l’action de ζ ne peut même pas permuter les courbes C_1, \dots, C_m – chaque courbe est envoyée sur elle-même par l’action de ζ . Ceci revient à dire que la

tresse tubulaire $\widehat{\zeta}$ est pure. En revanche, les tresses intérieures $\zeta_{[1]}, \dots, \zeta_{[m]}$ sont complètement arbitraires, car les tresses intérieures de β n'ont que deux brins et commutent avec toutes les tresses à deux brins.

Pour résumer, on vient de voir que $Z(\beta)$ est isomorphe à $PB_m \times \mathbb{Z}^m$. Comme le groupe des tresses pures PB_m ne possède pas de famille génératrice avec moins de $\frac{m(m-1)}{2}$ éléments, toute famille génératrice de $Z(\beta)$ a au moins $\frac{m(m-1)}{2}$ (et en fait même $\frac{m(m-1)}{2} + m$) éléments. On voit donc que le nombre de générateurs de $Z(\beta)$ peut augmenter de façon quadratique avec le nombre de brins.

L'exemple précédent était assez facile car

- (a) la tresse tubulaire était pure (en fait même triviale), mais surtout car
- (b) les tresses intérieures étaient mutuellement non-conjuguées. Si, par exemple, dans la tresse β les deux premiers tubes avaient contenu la *même* tresse intérieure ($\beta_{[1]} = \beta_{[2]}$), alors dans le centralisateur de β on aurait dû autoriser des tresses ζ tel que $\widehat{\zeta}$ est pure, avec l'exception des deux premiers brins, qui peuvent être échangés.

Des tels sous-groupes de B_n , qui sont des images réciproques de sous-groupes de S_n par l'application naturelle $B_n \rightarrow S_n$, s'appellent des groupes de tresses *mixtes*.

Si les conditions (a) et (b) sont enlevées, alors on a un énoncé beaucoup plus compliqué :

Théorème 6.13 *Si $\beta \in B_n$ est réductible, alors il existe une suite exacte courte scindée*

$$1 \longrightarrow Z(\beta_{[1]}) \times \cdots \times Z(\beta_{[m]}) \longrightarrow Z(\beta) \longrightarrow Z_0(\widehat{\beta}) \longrightarrow 1,$$

où $Z_0(\widehat{\beta})$ est un sous-groupe de $Z(\widehat{\beta})$ isomorphe soit à \mathbb{Z}^2 , soit à un groupe de tresses mixte. De plus $Z(\beta)$ possède une famille génératrice avec au plus $\frac{k(k+1)}{2}$ éléments (si $n = 2k$), ou avec au plus $\frac{k(k+3)}{2}$ éléments (si $n = 2k + 1$)

La partie la plus difficile de la démonstration est la construction d'un scindement de la suite exacte.

Avant de discuter des questions algorithmiques, nous allons regarder un exemple qui démontre que le nombre minimal de générateurs de $Z(\beta)$ est assez difficile à déterminer.

Exemple 6.14 Soit β la tresse dessinée en figure 15 – il s’agit d’une tresse réductible, avec tresse tubulaire associée σ_1^2 , dont les deux tubes contiennent les tresses triviales à deux et trois brins, respectivement. Pour le centralisateur de β on obtient

$$Z(\beta) \cong PB_2 \times (B_2 \times B_3) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times B_3.$$

On pourrait penser que toute famille génératrice de $Z(\beta)$ a au moins quatre éléments ; or ceci serait erroné, car le groupe $\mathbb{Z} \times B_3$ est engendré par les *deux* éléments $(1, \sigma_1\sigma_2)$ et $(1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1)$.

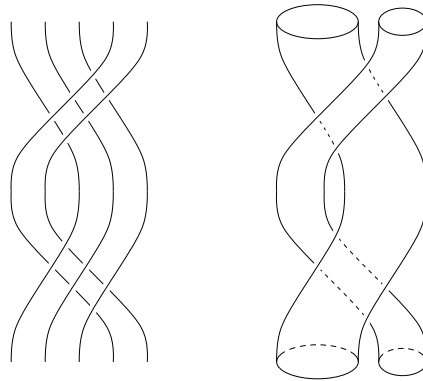


FIG. 15 – Une tresse réductible, avec sa tresse tubulaire associée. Le centralisateur de cette tresse peut être engendré par moins d’éléments qu’on penserait intuitivement.

En ce qui concerne les questions algorithmiques, il y a ici, dans le cas des tresses réductibles, un problème fascinant qui se pose. Comment peut-on décider si une tresse donnée β est réductible, et si oui, déterminer son système de réduction ? Une réponse possible est que ceci fait partie des algorithmes standards en théorie de Nielsen-Thurston.

Une réponse plus intéressante fait intervenir l’algorithme de El Rifai - Morton. Si β est réductible, alors il y a au moins un élément de son ensemble hyper-sommital [61] (et en particulier dans l’ensemble super-sommital) dont les courbes du système de réduction sont rondes (ceci est la conséquence d’une observation de Bernadete, Gutierrez et Nitecki [8]). Comme l’existence de courbes de réduction rondes est facile à tester, et comme pour tout élément α de l’ensemble super-sommital on connaît explicitement une tresse qui conjugue α vers β , on peut déterminer les courbes de réduction de β .

Ceci suggère une perspective très intéressante, qui pour l’instant est dans le domaine de la spéculation. On peut spéculer que le système de réduction est

en fait visible comme système de courbes rondes dans *tous* les éléments de l'ensemble hyper-sommital. L'intuition derrière cette idée est que le processus de cyclage et décyclage qui est au cœur de l'algorithme de El Rifai-Morton simplifie les courbes de réduction à chaque pas.

7 Groupes d'Artin à angles droits et groupes hyperboliques dans des groupes de tresses

Dans ce chapitre, qui est basé sur les articles [30, 31], nous discutons une tentative d'attaquer simultanément deux problèmes naturels concernant les groupes de tresses. Voici les problèmes.

Premièrement, trouver des sous-groupes “intéressants” dans des groupes de tresses. Les sous-groupes qui sont plongés de façon quasi-isométrique sont particulièrement remarquables. (Cette condition de plongement quasi-isométrique ressemble à une condition de quasi-convexité.) Ceci sert d'une part, évidemment, pour comprendre la structure des sous-groupes de groupes de tresses ; et d'autre part, pour élucider des propriétés d'un groupe, une stratégie courante est de le plonger dans un groupe qu'on connaît mieux. La démonstration de [29] est une application typique de cette stratégie. Il est clair qu'il y a des restrictions sérieuses sur la structure de sous-groupes de B_n ou PB_n . Par exemple, il est conjecturé que dans un groupe de tresses pures, tout sous-groupe engendré par deux éléments est soit abélien, soit libre.

Deuxièmement, on essaie de trouver des sous-groupes aussi grands que possible qui sont réalisable. Rappelons le “problème de réalisation de Nielsen”, qui est peut-être la question ouverte la plus embarrassante en théorie des tresses (après la question si B_n est $CAT(0)$) : existe-t-il un homomorphisme $\iota: B_n \rightarrow \text{Homeo}(D_n, \partial D_n)$ tel que la composition

$$B_n \xrightarrow{\iota} \text{Homeo}(D_n, \partial D_n) \xrightarrow{p} B_n$$

est l'identité (où p note la projection naturelle) ? On sait que ceci est impossible si on cherche une représentation dans le groupe des *difféomorphismes* (plutôt que des homéomorphismes) de D_n [96]. À défaut de résoudre ce problème, on peut trouver au moins des sous-groupes intéressants qui sont réalisables.

L'observation qui est à la base de nos résultats est la suivante. Soient c et c' deux courbes simples fermées dans D_n qui s'intersectent transversalement. Soient T_c et $T_{c'}$ des twists de Dehn, de classe C^∞ , avec support dans des voisinages de c et c' , et soient τ_c et $\tau_{c'}$ les éléments de B_n représentés par ces twists. On a alors :

- Si c et c' sont disjoints, alors T_c et $T_{c'}$ commutent. De façon semblable, τ_c et $\tau_{c'}$ commutent, aussi.
- Si c et c' s'intersectent (forcément en au moins deux points), alors T_c et $T_{c'}$ engendrent un sous-groupe libre de $\text{Homeo}(D_n)$. Si, en plus, les courbes sont en position minimale (c.à.d. si l'on ne peut pas les rendre disjoints par une isotopie) alors τ_c et $\tau_{c'}$ engendrent un sous-groupe libre de B_n .

Dans des surfaces non-planaires, les résultats précédents sont encore vrais, sauf que c et c' peuvent avoir exactement un point d'intersection. Dans ce cas là, il y a une relation de type tresse : $\tau_c \tau_{c'} \tau_c = \tau_{c'} \tau_c \tau_{c'}$. Là, par contre, il n'y a, pour autant que nous sachions, pas de réalisation : il n'y a apparemment pas d'homéomorphismes $T_c, T_{c'}$ représentant τ_c et $\tau_{c'}$ tel que $T_c T_{c'} T_c = T_{c'} T_c T_{c'}$.

Ceci suggère la stratégie suivante, en deux étapes, pour obtenir des plongements de groupes "intéressants" (par exemple des groupes de surfaces, autres groupes hyperboliques, groupes de tresses dans des graphes etc.) dans des groupes de tresses :

- (1) On essaie de plonger (de façon quasi-isométrique) le groupe dans un groupe d'Artin à angles droits.
- (2) On construit des plongements quasi-isométriques, réalisables du groupe d'Artin à angles droits en question dans un groupe de tresses (pures) PB_m , pour un entier m assez grand.

Philosophiquement, pour plonger un groupe G dans B_m , on ramène tous les relations de G à des relations de commutation. Ensuite, il est facile de trouver des éléments de groupes de tresses qui satisfont une relation de commutation – il suffit de prendre deux éléments de supports disjoints (et en particulier des éléments qui ne sont pas pseudo-Anosov). Il n'est donc pas surprenant que la tâche s'avère beaucoup plus difficile si l'on insiste que ne soient autorisés dans l'image d'une représentation $G \rightarrow B_m$ que des éléments pseudo-Anosov. À titre d'exemple, il n'est pas connu [90] s'il existe des représentations fidèles $\pi_1(S) \rightarrow B_m$, où S est une surface compacte hyperbolique, dont l'image est entièrement pseudo-Anosov (sauf l'élément neutre). Une réponse positive aurait des répercussions sur l'existence d'une variété de dimension 4 à courbure négative qui est fibré sur une surface.

7.1 Définitions

Rappelons qu'un groupe d'Artin à angles droits possède, par définition, une présentation avec un nombre fini de générateurs, et des relations qui sont toutes des relation de commutation entre générateurs. Un tel groupe peut être décrit

par un graphe Δ sans boucles et sans arêtes doubles, où les sommets symbolisent les générateurs, et les arêtes les relations de commutation. En fait, ceci établit une correspondance exacte entre les ensembles des graphes Δ (sans arêtes doubles et sans boucles) et des groupes d'Artin à angles droits $G(\Delta)$.

Dans les groupes d'Artin à angles droits les problèmes des mots et de conjugaison sont très faciles à résoudre. Par exemple, pour décider si deux mots représentent le même élément, il suffit de les réduire (d'éliminer tous les sous-mots $a_i^{\pm 1} w a_i^{\mp 1}$, où tous les lettres de w commutent avec a_i), et vérifier si, à des applications des relations de commutation près, il sont égaux. Pour le problème de conjugaison, on fait la même chose avec des mots cycliques.

Étant donnée une surface compacte orientable S qui est munie d'une décomposition en anneaux (en général non disjoints)

$$S = A_1 \cup \dots \cup A_n,$$

on va associer à S le groupe d'Artin déterminé par le graphe de *non-adjacence* des anneaux : ce groupe a des générateurs a_1, \dots, a_n , et deux générateurs commutent si et seulement si les anneaux correspondants sont disjoints.

On va noter D^2 le disque unité dans \mathbb{C} , et D_m le disque avec m points à l'intérieur enlevé. On note $Diff(D^2, \partial D^2, vol)$ le groupe de difféomorphismes de D^2 qui préservent l'aire, et qui sont l'identité dans un voisinage ouvert du bord. De plus (suivant Benaim et Gambaudo [6]), ce groupe est muni d'une métrique invariante par multiplication à gauche, la "métrique hydrodynamique" ou métrique L^2 : si $\{\varphi_t\}_{t \in [0,1]}$ est un chemin lisse dans $Diff(D^2, \partial D^2, vol)$, alors on pose que la longueur du chemin est

$$\int_0^1 \sqrt{\int_{D^2} \left\| \frac{d\varphi_t}{dt}(x) \right\|^2 dx} dt.$$

La question si nos résultats s'appliquent encore si, au lieu de la métrique L^2 , on utilise la "métrique de Hofer" mérite des recherches supplémentaires. La stratégie la plus évidente serait de généraliser le lemme 4 de [6].

7.2 Plongements dans des groupes d'Artin à angles droits

Étudions quelques exemples d'homomorphismes $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow G(\Delta)$, où X est un espace topologique et $G(\Delta)$ le groupe d'Artin à angles droits correspondant à un graphe Δ . Pour démontrer que ces homomorphismes sont fidèles et quasi-isométriques, on peut utiliser un argument assez général basé sur la "link condition" de Gromov ; mais en fait, dans tous les exemples étudiés on voit de

façon élémentaire que toute géodésique de 1 à $\varphi(x)$ (pour $x \in \pi_1(X)$) reste uniformément proche de l'image de φ .

Exemple 7.1 (Groupes de surfaces) Il est démontré dans [30] que le groupe fondamental de toute surface compacte hyperbolique, avec la seule exception de la surface non-orientable de $\chi = -1$, se plonge dans un groupe d'Artin à angles droits. Par exemple, si S est orientable, alors $\pi_1(S)$ se plonge dans $G(\Delta)$, où Δ est le graphe pentagone. L'idée est de recoller le nombre requis de copies de la surface montrée en figure 16, et d'envoyer chaque chemin dans S sur le mot dans les lettres $a^{\pm 1}, \dots, e^{\pm 1}$ lu pendant le parcours du chemin.

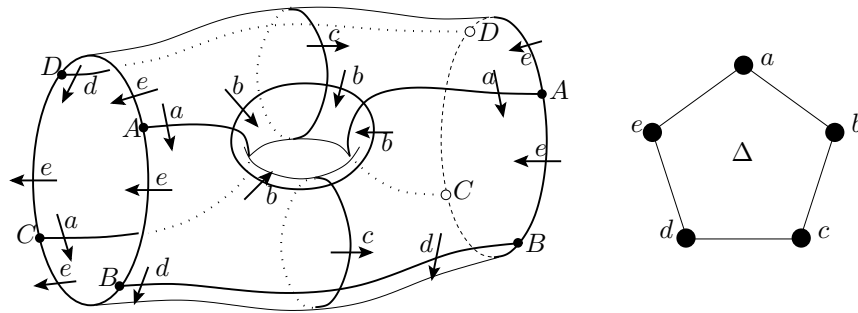


FIG. 16 – Comment plonger des groupes fondamentaux de surfaces orientables dans le groupe d'Artin à angles droits $G(\Delta)$

Le problème quels groupes de surfaces se plongent, et comment, dans quels groupes d'Artin (ou de Coxeter) avait déjà été étudié dans plusieurs articles antérieurs, notamment [42, 67].

En recollant des bouts de surface de telle façon qu'on n'obtient pas de variété mais un complexe cellulaire plus compliqué, on peut plonger d'autres groupes hyperboliques dans des groupes d'Artin à angles droits. Il reste cependant un problème ouvert s'il y a des groupes fondamentaux de 2-complexes qui sont δ -hyperboliques et dont le bord n'a pas de point de coupure local (qui est donc une courbe de Menger ou un tapis de Sierpinski, selon [82]) et qui se plongent dans un groupe d'Artin à angles droits.

Exemple 7.2 (Groupes de tresses de graphes) Si Γ est un graphe fini, alors nous allons considérer l'espace de configurations de n points (ou "particules") dans Γ , noté $X_n(\Gamma)$, c'est-à-dire, l'espace des n -uplets de points distincts dans Γ . Avec un petit mensonge on peut dire que cet espace est homotopiquement équivalent à l'espace de configurations *réduit*, où, dans chaque configuration,

au plus un seul des n points est admis dans l'adhérence de chaque arête. Pour rectifier le mensonge il faut rajouter que ceci n'est vrai qu'après éventuellement une sous-division de chaque arête en plusieurs arêtes. On va noter $RB_n(\Gamma) = \pi_1(X_n(\Gamma))$, le groupe de tresses (réduit) à n brins du graphe Γ . Ces groupes ont été étudiés notamment dans [1, 2, 52, 112].

Nous affirmons que ce groupe se plonge de façon quasi-isométrique dans un groupe d'Artin à angles droits. Effectivement, soit Δ le graphe dont les sommets correspondent aux arêtes de Γ , et où deux sommets sont reliés par une arête si les deux arêtes correspondantes de Γ n'ont pas de point extrémal en commun. C'est à dire, deux générateurs de $G(\Delta)$ commutent si et seulement si les arêtes correspondantes de Γ sont éloignées.

Un élément de $RB_n(\Gamma)$ est une danse des n particules dans le graphe Γ ; on va choisir arbitrairement une orientation pour chaque arête de Γ . On va plonger $RB_n(\Gamma)$ dans $G(\Delta)$ en écrivant un générateur de $G(\Delta)$ ou son inverse chaque fois qu'un des n particules traverse l'arête correspondante de Δ dans son sens préféré ou dans le sens inverse.

Exemple 7.3 (Groupe fondamental d'une variété hyperbolique de dimension 3) Il y a une variété M compacte hyperbolique de dimension 3 qui est pavée par 2^{20} dodécaèdres hyperboliques réguliers dont tous les angles diédraux sont égaux à $\frac{\pi}{2}$.

Comme dans le premier exemple, on définit le groupe d'Artin à angles droits dont les générateurs correspondent aux faces du dodécaèdre, et où deux générateurs commutent si les faces correspondantes s'intersectent. Il s'agit donc du groupe $G(\Delta)$, où Δ est le 1-squelette du polyèdre dual au dodécaèdre, c'est-à-dire du icosaèdre.

7.3 Plongements de groupes d'Artin à angles droits dans PB_m et $Diff(D^2, \partial D^2, vol)$

Dans cette partie, nous donnons l'idée de la démonstration d'un résultat qui dit que "beaucoup" de groupes d'Artin à angles droits se plongent de façon q.i. dans le groupe PB_m , pour un certain entier m , qui doit être choisi en fonction du groupe d'Artin. De plus, ce plongement se relève à un plongement q.i. dans $Diff(D^2, \partial D^2, vol)$, et plus précisément dans le sous-groupe contenant les difféomorphismes qui sont l'identité dans un voisinage des trous de D_m .

Soit Δ un graphe, et $G(\Delta)$ le groupe d'Artin à angles droits associé. Si $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ est une collection d'anneaux plongés dans le plan (qui peuvent

s'intersecter mutuellement, dans un nombre fini de carrés disjoints), alors on dit que le groupe d'Artin à angles droits associé au graphe de non-adjacence de \mathcal{A} est *de type planaire*. Donc pour démontrer qu'un groupe $G(\Delta)$ est de type planaire, il suffit de construire une collection d'anneaux dans \mathbb{R}^2 , étiquetés par les générateurs, où A_i et A_j sont disjoints si et seulement si les générateurs correspondants de $G(\Delta)$ commutent.

Par exemple, une construction simple montre que si le graphe opposé Δ^{op} (qui a les mêmes sommets que Δ , et une arête entre chaque couple de sommets qui ne sont *pas* reliés par une arête dans Δ) est un graphe planaire, alors $G(\Delta)$ est de type planaire. néanmoins, il faut bien insister que cette condition est suffisante, mais loin d'être nécessaire.

En fait, il est une tâche non-triviale de trouver un exemple d'un groupe $G(\Delta)$ qui n'est pas de type planaire. En voilà un : on prend un graphe non-planaire (par exemple K_5 ou $K_{3,3}$) et on sous-divise chaque arête en deux, en rajoutant un sommet au milieu. On pose que le graphe qui en résulte est Δ^{op} . Il est un exercice de montrer qu'alors $G(\Delta)$ n'est effectivement pas de type planaire.

Théorème 7.4 *Soit $G(\Delta)$ un groupe d'Artin à angles droits de type planaire. Alors il existe un homomorphisme injectif et quasi-isométrique $\varphi: G(\Delta) \rightarrow PB_m$, où m est un entier qui dépend du graphe Δ . De plus, le sous-groupe image(φ) est réalisable : il existe un plongement quasi-isométrique $\widehat{\varphi}: G(\Delta) \rightarrow \text{Diff}(D^2, \partial D^2, \text{vol})$ tel que pour tout $x \in G(\Delta)$, on a que $\widehat{\varphi}(x)$ est un difféomorphisme représentant la classe $\varphi(x)$.*

Ceci généralise un résultat de Benaim et Gambaudo [6], qui était une des motivations pour les travaux décrits ici, et qui affirme que ce résultat est vrai dans les cas spéciaux où $G(\Delta)$ est un groupe libre ou isomorphe à \mathbb{Z}^n .

Soit S la surface obtenu de la réunion des anneaux $A_1 \cup \dots \cup A_n$ en enlevant de l'intérieur de chaque anneau A_i deux points. Pour clarifier l'idée de la démonstration nous allons juste expliquer le plongement de $G(\Delta)$ dans le groupe d'homéotopies de S .

On envoie chaque générateur a_i de $G(\Delta)$ sur un difféomorphisme de S dont le support est contenu dans l'anneau A_i , et qui, restreint à cet anneau, est pseudo-Anosov. Pour démontrer que cet homomorphisme est injectif et quasi-isométrique, on fait l'observation suivante : si l'on note complexité(α) (pour $\alpha \in \mathcal{MCG}(S)$) le nombre d'intersections d'un diagramme de courbes de α avec le diagramme de courbes trivial, alors on a une inégalité du type

$$\text{complexité}(\varphi(w)) \geq c \cdot e^{\text{longueur}(w)}$$

qui est satisfaite pour tout mot réduit w dans les générateurs de $G(\Delta)$ et leurs inverses. Intuitivement, ceci veut dire que avec notre définition de φ , il est garanti que la complexité du difféomorphisme $\varphi(w)$ augmente aussi vite que possible avec la longueur du mot w . Ceci implique que l'application $\varphi: G(\Delta) \rightarrow \mathcal{MCG}(S)$ est quasi-isométrique.

8 Quasi-isométries de B_3

Le but de ce chapitre est de décrire les quasi-isométries de B_3 vers lui-même, et surtout de situer ce problème dans son contexte. La référence principale pour ce chapitre est l'article [118].

Dans le contexte du programme de Gromov de classifier des groupes de type fini (c'est à dire, qui possèdent une famille génératrice finie) à quasi-isométrie près, on est souvent confronté aux problèmes suivants :

- Démontrer la rigidité quasi-isométrique d'un groupe Γ , c'est à dire : montrer que tout groupe H qui est quasi-isométrique à Γ est en fait *commensurable* avec Γ (il existe un homomorphisme $H \rightarrow \Gamma$ dont le noyau est fini, et dont l'image est d'indice fini dans Γ .) Autrement dit, démontrer que si un groupe H ressemble à Γ géométriquement, alors il lui ressemble aussi dans sa structure algébrique.
- Étudier les quasi-isométries d'un groupe Γ vers lui-même. Si, par exemple, on arrive à démontrer que toute quasi-isométrie de Γ est à distance bornée d'un isomorphisme de Γ , alors on peut en déduire (si le centre virtuel de Γ est trivial) la rigidité quasi-isométrique de Γ . Même si ceci n'est pas le cas, il est intéressant de calculer le groupe $QI(\Gamma) := \{\text{quasi-isométries de } \Gamma\} / \sim$, où deux quasi-isométries à distance bornée l'une de l'autre sont regardés comme équivalentes.

Les questions autour de la rigidité quasi-isométrique ont été un domaine de recherche très actif ces dernières années. Par exemple, il y a maintenant des résultats très profonds sur la rigidité quasi-isométrique des classes de groupes agissants de façon discrète, cocompacte et à covolume fini sur \mathbb{H}^3 (Gromov-Sullivan) ou sur des espaces symétriques de rang ≥ 2 (dû à B. Kleiner et B. Leeb [87] et, par d'autres méthodes, à A. Eskin et B. Farb [50]). Il y a même des résultats dans le cas d'actions non-cocompactes sur des tels espaces symétriques (A. Eskin [49]). Il y a aussi un théorème de Whyte [?] qui affirme que le groupe $\mathbb{Z}^n \rtimes SL(n, \mathbb{Z})$ est quasi-isométriquement rigide.

Cependant, la question la plus intéressante dans notre contexte reste grand ouverte : est-ce que les groupes d'homéotopies (voire les groupes de tresses)

sont quasi-isométriquement rigides ? Le seul cas connu est celui des surfaces sans bord avec exactement un point distingué (Mosher et Whyte [101]).

En particulier il semble que les quasi-isométries de B_n sont extrêmement difficiles à comprendre. La seule exception sont les groupes de tresses à trois brins (qui est quasi-isométrique à $T \times \mathbb{R}$, où T est un arbre infini trivalent dont tous les arêtes sont de longueur 1), et certains autres espaces quasi-isométriques au produit d'un arbre avec une variété uniformément contractile. Ces résultats sont dus à E. Souche et l'auteur [118], et indépendamment à K. Whyte (qui a en fait démontré des résultats plus généraux - voir [99, 100]).

Regardons donc une quasi-isométrie φ de $T \times \mathbb{R}$. Remarquons d'abord que φ n'est *pas* forcément proche d'un automorphisme de B_3 – par exemple, si $\lambda: T \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne arbitraire, alors

$$\varphi: T \times \mathbb{R} \rightarrow T \times \mathbb{R}, (t, x) \mapsto (t, \lambda(t) + x)$$

est une quasi-isométrie. On a néanmoins le théorème de rigidité partielle suivant.

Théorème 8.1 *Soit φ une quasi-isométrie de $T \times \mathbb{R}$. Alors il existe une quasi-isométrie $\psi: T \rightarrow T$ et une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $(t, x) \in T \times \mathbb{R}$ on a*

$$d_T(\pi_T(\varphi(t, x)), \psi(t)) < C$$

où $\pi_T: T \times \mathbb{R} \rightarrow T$ note la projection canonique.

Autrement dit, φ induit un élément de $QI(T)$ bien-défini, il “préserve la \mathbb{R} -direction”.

Ce qui est remarquable dans l'article [118], presque plus que le résultat, sont les techniques utilisés pour la démonstration. Le rôle de la quasi-géométrie est minimisé, et la preuve s'appuie le plus possible sur des notions topologiques très élémentaires, comme la transversalité et le degré d'une application entre deux variétés.

9 Ordonnabilité des groupes fondamentaux de variétés

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que les groupes de tresses, ainsi que certaines de leur généralisations les plus importantes, sont ordonnables, voire bi-ordonnables ; en plus, les ordres révélaient des aspects combinatoires et géométriques de ces groupes qui sont très intéressants en soi. Il est donc raisonnable d'espérer que l'étude des propriétés d'ordonnabilité des groupes de surfaces et de 3-variétés mènera, elle aussi, vers des résultats et interprétations d'un intérêt propre sur ces groupes.

9.1 Groupes de surfaces

Un résultat classique, dû à Baumslag et Long (voir [4, 91] et plus récemment [26]), dit que les groupes fondamentaux des surfaces *orientables* sont bi-ordonnables, car ils sont résiduellement libres (c'est à dire, ils se plongent dans des produits infinis $F_{i_1} \times F_{i_2} \times \dots$, où F_{i_k} signifie le groupe libre à i_k générateurs).

Il reste donc à étudier les surfaces non-orientables. Nous commençons avec $\pi_1(P^2)$, qui est le groupe d'ordre 2. Bien évidemment, il y a de la torsion dans ce groupe, donc il n'est pas ordonnable à gauche, et à fortiori pas bi-ordonnable. Ensuite, le groupe de la bouteille de Klein K n'est pas bi-ordonnable, car l'élément représenté par le méridien de K est conjugué à son propre inverse. En revanche, $\pi_1(K)$ est une extension de \mathbb{Z} par \mathbb{Z} , donc il est ordonnable à gauche par la partie (a) du lemme suivant.

Lemme 9.1 *On considère une suite courte exacte de groupes*

$$1 \rightarrow A \hookrightarrow B \xrightarrow{\text{surj.}} C \rightarrow 1.$$

(a) *Si A et C sont ordonnables à gauche, alors B l'est aussi.*

(b) *Si A et C sont bi-ordonnables, et si en plus l'action de B sur A par conjugaison préserve un bi-ordre de A , alors B est bi-ordonnable.*

Il reste à résoudre le cas des surfaces non-orientables de courbure négative. Les groupes fondamentaux de ces surfaces (et en fait de toutes les surfaces de courbure négative) sont des sous-groupes de $\pi_1(\Sigma_{-1})$, où Σ_{-1} note la surface non-orientable avec $\chi = -1$. Donc pour démontrer que le groupe fondamental de toutes les surfaces hyperboliques sont négatifs, il suffit de démontrer

Proposition 9.2 [14, 110] *Le groupe $\pi_1(\Sigma_{-1})$ est bi-ordonnable.*

La démonstration utilise la suite exacte $1 \rightarrow \pi_1(\widehat{\Sigma}_{-1}) \rightarrow \pi_1(\Sigma_{-1}) \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow 1$ (où $\widehat{\Sigma}_{-1}$ note un certain revêtement de la surface Σ_{-1}) et le lemme 9.1(b).

9.2 Groupes de 3-variétés

L'étude de l'ordonnabilité des groupes fondamentaux des variétés de dimension 3 est beaucoup plus difficile qu'en dimension 2. Il y a même des liens étroits entre certaines questions ouvertes sur les ordres sur des groupes de 3-variétés et des questions célèbres sur la topologie et géométrie des 3-variétés ; par exemple, il est

concevable que toute 3-variété a un revêtement d'indice fini dont le groupe est bi-ordonnable, mais une démonstration de cet énoncé impliquerait la fameuse conjecture “le premier nombre de Betti virtuel est positif”.

L'article [14] contient des résultats partiels et une discussion des problèmes ouverts dans ce domaine. Un des résultats fondamentaux, qui est très spécifique à la dimension 3, car il dépend du théorème sur le cœur compacte de P. Scott [113], est

Théorème 9.3 (J. Howie, H. Short [78]) *Soit M^3 une 3-variété orientable, compacte, première. S'il existe une surjection $\pi_1(M^3) \rightarrow \mathbb{Z}$, alors $\pi_1(M^3)$ est ordonnable à gauche.*

En particulier, les groupes de nœuds sont ordonnables à gauche, car leur abélianisé est \mathbb{Z} .

Si l'on restreint l'attention aux 3-variétés qui portent une des huit géométries possibles (au sens de Thurston - voir [114]), l'article [14] démontre que dans chacune des huit classes il y a des variétés ordonnables à gauche et d'autres non-ordonnables. Pour toutes les géométries autres que l'hyperbolique, on obtient une classification complète des 3-variétés dont les groupes sont ordonnables à gauche et bi-ordonnables.

Dans ce contexte, il convient de se rappeler que six parmi les sept géométries restantes sont associés aux variétés fibrés de Seifert. Le théorème de classification pour les variétés de Seifert est donné dans [14], théorème 1.5. Sachant que, dans ce cas des variétés de Seifert, une fibre générique correspond à un élément du centre de $\pi_1(M^3)$, et que le groupe $\pi_1(M^3)$ est ordonnable à gauche si et seulement si il agit par homéomorphismes sur \mathbb{R} (voir chapitre 1.2), il n'est pas surprenant que l'ordonnabilité revient à une critère d'existence d'un feuilletage sur M^3 où les feuilles sont de dimension 2 et transverses aux fibres. Les 3-variétés de Seifert admettant un tel feuilletage sont classifiés depuis longtemps (voir théorème 5.4 de [14], et [46, 81, 103] pour les sources originales).

En ce qui concerne la bi-ordonnabilité, nous remarquons que ceci est une condition extrêmement stricte. Par exemple, si M^3 est une variété de Seifert avec au moins une fibre singulière, alors $\pi_1(M^3)$ n'est pas bi-ordonnable. En effet, un élément de $\pi_1(M^3)$ représenté par une fibre singulière n'est pas central, bien qu'une certaine puissance de cet élément soit homotope à une fibre régulière, et donc centrale ; or, dans un groupe bi-ordonnable, des racines d'éléments centraux doivent être centraux.

Pour les 3-variétés fibrées sur le cercle, la bi-ordonnabilité est équivalente à l'existence d'un bi-ordre sur $\pi_1(F)$ (où F représente la fibre) qui est invariant par l'homomorphisme de holonomie. La question si un tel ordre existe est, en général, un problème extrêmement difficile. Un tel ordre existe effectivement dans le cas du nœud de huit [110] et certains autres nœuds hyperboliques [108].

Références

- [1] A. Abrams, Configuration Spaces and Braid Groups of Graphs, PhD thesis, University of California at Berkeley (2000)
- [2] A. Abrams, R. Ghrist, Finding topology in a factory : configuration spaces, Amer. Math. Monthly 109 no. 2 (2002), 140–150
- [3] I. Agol, J. Hass, W. Thurston, 3-manifold knot genus is NP-complete, Proceedings of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 761–766, ACM, New York, 2002. [arXiv :math.GT/0205057](https://arxiv.org/abs/math.GT/0205057)
- [4] G. Baumslag, On generalised free products, Math. Z., 78 (1962), 423–438.
- [5] B. Bekka, P. de la Harpe, P. Valette, Kazhdan's property (T), ouvrage en préparation, disponible sur [http ://name.math.univ-rennes1.fr/bachir.bekka/](http://name.math.univ-rennes1.fr/bachir.bekka/)
- [6] M. Benaïm, J.-M. Gambaudo, Metric properties of the group of area preserving diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 11, 4661–4672
- [7] D. Benardete, M. Gutierrez, Z. Nitecki, A combinatorial approach to reducibility of mapping classes, Contemporary Math. 150 (1993), 1–31.
- [8] D. Benardete, M. Gutierrez, Z. Nitecki, Braids and the Nielsen-Thurston classification, J. Knot Theory and its Ramifications 4 (1995), 549–618.
- [9] M. Bestvina ; Non-positively curved aspects of Artin groups of finite type ; Geometry & Topology 3 (1999), 269–302.
- [10] M. Bestvina, M. Haendel, Train-tracks for surface homeomorphisms, Topology 34 (1995), 109–140.
- [11] J. Birman, Braids, links, and mapping class groups, Annals of Math. Studies, 82, Princeton University Press 1975.
- [12] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee, A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups, Adv. Math. 139 (1998), 322–353.
- [13] R. Botto Mura, A. Rhemtulla, Orderable groups, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 27. Marcel Dekker, Inc., New York–Basel, 1977.
- [14] S. Boyer, D. Rolfsen, B. Wiest, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 55 (2005), 243–288.
- [15] M. Bridson, A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Springer-Verlag (1999).
- [16] M. G. Brin and C. C. Squier. Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line, Inventiones Mathematicae, 44 (1985), 485–498.

- [17] P. Brinkmann, An implementation of the Bestvina-Handel algorithm for surface homeomorphisms, *Experiment. Math.* 9 (2000), 235–240. Programme d’ordinateur disponible sur www.math.uiuc.edu/~brinkman/software/train/
- [18] J. F. Brock, The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores, *J. Amer. Math. Soc.* 16 (2003), 495–535.
- [19] J. F. Brock, Pants decompositions and the Weil-Petersson metric. *Complex manifolds and hyperbolic geometry* (Guanajuato, 2001), 27–40, *Contemp. Math.*, 311, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [20] S. Burckel, The wellordering on positive braids, *J. Pure Appl. Algebra* 120 (1997), 1–17.
- [21] S. Burckel, Computation of the ordinal of braids, *Order*, 16 (1999), 291–304.
- [22] G. Burde, Über Normalisatoren der Zopfgruppe, *Hamburger Math. Abh.* 27 (1964), 97–115.
- [23] J. Burillo, S. Cleary, B. Wiest, Computational explorations in R.Thompson’s group F , prépublication 2005.
- [24] J. W. Cannon, W. J. Floyd, W. R. Parry, Introductory notes on Richard Thompson’s groups, *Enseign. Math.* (2), 42 (1996), 215–256.
- [25] A. Casson, A. Bleiler, Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston, *London Mathematical Society Student Texts*, 9. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [26] C. Champetier, V. Guirardel, Limit groups as limits of free groups : compactifying the set of free groups, prépublication [arXiv :math.GR/0401042](https://arxiv.org/abs/math/0401042).
- [27] R. Charney, J. Meier, K. Whittlesey ; Bestvina’s normal form complex and the homology of Garside groups ; *Geometriae Dedicata* 105 (2004), 171–188.
- [28] A. Constantin, B. Kolev, The theorem of Kerékjártó on periodic homeomorphisms of the disc and the sphere, *Enseign. Math* (2) 40 (1994) No 3-4, 193-204.
- [29] J. Crisp, L. Paris, The solution to a conjecture of Tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an Artin group, *Invent. Math.* 145 (2001), 19–36.
- [30] J. Crisp, B. Wiest, Embeddings of graph braid and surface groups in right-angled Artin groups and braid groups, *Alg. Geom. Topology* 4 (2004), 439–472.
- [31] J. Crisp, B. Wiest, Quasi-isometrically embedded subgroups of braid and diffeomorphism groups, prépublication [arXiv :math.GT/0506375](https://arxiv.org/abs/math/0506375), à paraître dans *Trans. Amer. Math. Soc.*.
- [32] M. W. Davis, Nonpositive curvature and reflection groups, dans “*Handbook of Geometric Topology*”, 373–422, North Holland, Amsterdam (2002)
- [33] B. de Kerékjártó, Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche, *Math. Annalen* 80 (1919), 3–7.
- [34] P. de la Harpe, G. Skandalis, Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales, *Enseign. Math.* (2) 32 (1986), 121–138.
- [35] P. Dehornoy, Braid groups and left distributive operations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 345 (1994), no. 1, 115–151

- [36] P. Dehornoy, Strange questions about braids, *J. Knot Th. and its Ramifications* 8-5 (1999), 589–620.
- [37] P. Dehornoy, A fast method for comparing braids, *Adv. Math.* 125 (1997), 200–235.
- [38] P. Dehornoy, Groups with a complemented presentation, *J. Pure Appl. Algebra* 116 (1997), 115–137.
- [39] P. Dehornoy, Groupes de Garside, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* ; 35 (2002), 267–306.
- [40] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest ; Why are braids orderable ?, *Panoramas & Synthèses* vol. 14, Soc. Math. France (2002).
- [41] P. Dehornoy, B. Wiest, On word reversing in braid groups, prépublication (2004) [arXiv :math.GR/0407333](https://arxiv.org/abs/math/0407333).
- [42] C. Droms, B. Servatius, H. Servatius, Surface subgroups of graph groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 106 (1989), 573–578
- [43] I. A. Dynnikov, On a Yang–Baxter mapping and the Dehornoy ordering, *Russian Math. Surveys* 57 (2002), no. 3, 592–594.
- [44] I. Dynnikov, B. Wiest, On the complexity of braids, prépublication (2004) [arXiv :math.GT/0403177](https://arxiv.org/abs/math/0403177).
- [45] S. Eilenberg, Sur les transformations périodiques de la surface de sphère, *Fund. Math.* 22 (1934), 28–41.
- [46] D. Eisenbud, U. Hirsch, W. Neumann, Transverse foliations on Seifert bundles and self-homeomorphisms of the circle, *Comm. Math. Helv.* 56 (1981), 638–660.
- [47] E. A. El-Rifai, H. R. Morton, Algorithms for positive braids, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 45 (1994), no. 180, 479–497.
- [48] D. B. A. Epstein, Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math.* 115 (1966), 83–107.
- [49] A. Eskin, Quasi-isometric rigidity of nonuniform lattices in higher rank symmetric spaces, *J. Amer. Math. Soc.* 11 (1998), 321–361.
- [50] A. Eskin, B. Farb, Quasi-flats and rigidity in higher rank symmetric spaces, *J. Amer. Math. Soc.* 10 (1997), 653–692.
- [51] D. Farley, Finiteness and CAT(0) properties of diagram groups, *Topology* 42 (2003), 1065–1082.
- [52] D. Farley, L. Sabalka, Discrete Morse theory and graph braid groups, prépublication [arXiv :math.GR/0410539](https://arxiv.org/abs/math/0410539)
- [53] F. A. Garside, The braid group and other groups, *Quarterly J. Math.* 20 (1969), 235–254.
- [54] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces - seminaire Orsay, Asterisque* 66–67, Société Math. de France, 1991.
- [55] R. Fenn, M. T. Greene, D. Rolfsen, C. Rourke, B. Wiest, Ordering the braid groups, *Pacific J. Math.* 191 (1999), no. 1, 49–74.
- [56] R. Fenn, D. Rolfsen, J. Zhu, Centralisers in the braid group and singular braid monoid, *l'Enseignement Mathématique* 42 (1996), 75–96.

- [57] R. Fenn, C. Rourke, Racks and links in codimension 2, *J. Knot Th. and its Ramifications* 1 (1992), 343–406.
- [58] N. Franco, J. González-Meneses, Conjugacy problem for braid groups and Garside groups. *Journal of Algebra* 266 (2003), 112–132.
- [59] N. Franco, J. González-Meneses, Computation of centralizers in braid groups and Garside groups. *Revista Matemática Iberoamericana* 19 (2003), 367–384.
- [60] F. A. Garside, The braid group and other groups, *Quart. J. Math. Oxford* 20 (1969), 235–254.
- [61] V. Gebhardt, A new approach to the conjugacy problem in Garside groups, prépublication (2003). [arXiv :math.GT/0306199](https://arxiv.org/abs/math.GT/0306199).
- [62] S. M. Gersten, H. B. Short, Rational subgroups of biautomatic groups, *Annals Math.* 134 (1991), 125–158.
- [63] É. Ghys, Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov, *Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988*. Edited by É. Ghys and P. de la Harpe. *Progress in Mathematics*, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston
- [64] J. González-Meneses, Ordering pure braid groups on compact, connected surfaces, *Pacific J. Math.* 203 (2002), 369–378.
- [65] J. González-Meneses, The n th root of a braid is unique up to conjugacy, *Algebr. Geom. Topol.* 3 (2003), 1103–1118.
- [66] J. González-Meneses, B. Wiest, On the structure of the centralizer of a braid, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (37) (2004), 729–757.
- [67] C. Gordon, D. D. Long, A. W. Reid, Surface subgroups of Coxeter and Artin groups, *J. Pure Appl. Algebra* 189 (2004), 135–148.
- [68] V. S. Guba, On the properties of the Cayley graph of Richard Thompson’s group F , *Internat. J. Algebra Comput.*, 14 (2004), 677–702. *International Conference on Semigroups and Groups in honor of the 65th birthday of Prof. John Rhodes*.
- [69] V. S. Guba, M. S. Sapir, *Diagram groups*, *Memoirs of the AMS*, 130 (1997)
- [70] V. S. Guba, M. V. Sapir. The Dehn function and a regular set of normal forms for R. Thompson’s group F , *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 62 (1997), 315–328.
- [71] V. S. Guba, M. S. Sapir, *Diagram groups are totally orderable*, prépublication (2003) [arXiv :math.GR/0305153](https://arxiv.org/abs/math.GR/0305153).
- [72] V. S. Guba, M. S. Sapir, *Diagram groups and directed 2-complexes : homotopy and homology*, prépublication [arXiv :math.GR/0301225](https://arxiv.org/abs/math.GR/0301225)
- [73] V. S. Guba, M. S. Sapir, *Rigidity properties of diagram groups*, *International Conference on Geometric and Combinatorial Methods in Group Theory and Semigroup Theory (Lincoln, NE, 2000)*. *Internat. J. Algebra Comput.* 12 (2002), no. 1-2, 9–17.
- [74] V. S. Guba, M. S. Sapir, *On subgroups of R.Thompson’s group F and other diagram groups*, *Sb. Math.* 190 (1999), 1077–1130
- [75] T. Hall, *Implementation de l’algorithme de Bestvina-Handel*, disponible sur www.liv.ac.uk/maths/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html

- [76] U. Hamenstädt, Geometry of the complex of curves and of Teichmüller space , prépublication, mars 2005.
- [77] G. Higman, Ordering by divisibility in abstract algebras, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1952), 326–336.
- [78] J. Howie, H. Short, The band-sum problem, J. London Math. Soc. **31** (1985), 571–576.
- [79] N. V. Ivanov, Subgroups of Teichmüller modular groups, Translations of mathematical monographs vol. 115 (1992), AMS.
- [80] N. V. Ivanov, Examples of centralizers in the Artin braid groups, Preprint (2003), [arXiv :math.GT/0306418](https://arxiv.org/abs/math/0306418)
- [81] M. Jankins, W. Neumann, Rotation numbers and products of circle homomorphisms, Math. Ann. 271 (1985), 381–400.
- [82] I. Kapovich, N. Benakli, Boundaries of hyperbolic groups, Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001), 39–93, Contemp. Math. 296, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [83] H. Kesten, Full Banach mean values on countable groups. Math. Scand. 7 (1959), 146–156.
- [84] H. Kesten, Symmetric random walks on groups, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 336–354.
- [85] V. Kilibarda, On the algebra of semigroup diagrams, Int. J. of Alg. and Comput. 7 (1997), 313–338.
- [86] D. Kim, D. Rolfsen, Ordering groups of pure braids and fibre-type hyperplane arrangements, Canadian J. Math. 55 (2003), 822–838.
- [87] B. Kleiner, B. Leeb, Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 86 (1997), 115–197.
- [88] D. M. Larue, On braid words and irreflexivity, Algebra Universalis 31 (1994), 104–112.
- [89] R. Laver, Braid group actions on left distributive structures and well-orderings in the braid group, J. Pure Appl. Algebra 108 (1996), 81–98.
- [90] C. J. Leininger, A. W. Reid, A combination theorem for Veech subgroups of the mapping class group, prépublication [arXiv :math.GT/0410041](https://arxiv.org/abs/math/0410041)
- [91] D. Long, Planar kernels in surface groups, Quart. J. Math. Oxford (2), 35 (1984), 305–310
- [92] J. Los, Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc : a finite algorithm, Proc. London Math. Soc. (3) 66 (1993), 400–430.
- [93] G. S. Makanin, On normalizers in the braid group, Mat.Sb. 86 (128), 1971, 171–179.
- [94] H. Masur, Y. Minsky, Geometry of the complex of curves II : Hierarchical structure, Geom. Funct. Anal. 10 (2000), 902–974.
- [95] J. Meakin, M. Sapir, Congruences on free monoids and submonoids of polycyclic monoids, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 54 (1993), 236–253.

- [96] S. Morita, Characteristic classes of surface bundles, *Bull. A. M. S.* 11, no. 2 (1984), 386–388
- [97] L. Mosher, Mapping class groups are automatic, *Ann. of Math. (2)* 142 (1995), no. 2, 303–384.
- [98] L. Mosher, A user’s guide to mapping class groups, once punctured surfaces. Geometric and computational perspectives on infinite groups (Minneapolis, MN and New Brunswick, NJ, 1994), 101–174, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [99] L. Mosher, M. Sageev, K. Whyte, Quasi-actions on trees I. Bounded valence. *Ann. of Math.* 158 (2003), 115–164.
- [100] L. Mosher, M. Sageev, K. Whyte, Quasi-actions on trees II. Finite depth Bass-Serre trees. Prépublication.
- [101] L. Mosher, K. Whyte. Notes d’un cours “Homology and dynamics in quasi-isometric rigidity” de Lee Mosher, Durham, Juillet 2003, disponibles sur la page personnelle de L. Mosher.
- [102] E. Munarini, Fiche de la suite numero A080635 dans Sloane’s “Online Encyclopedia of Integer Sequences”, <http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A080635>
- [103] R. Naimi, Foliations transverse to fibers of Seifert manifolds, *Comm. Math. Helv.* **69** (1994), 155–162.
- [104] A. Navas, Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 35 (2002), 749–758.
- [105] W. D. Neumann, M. Shapiro, A short course in geometric group theory, Notes for the ANU Workshop January/February 1996.
- [106] L. Paris, D. Rolfsen, Geometric subgroups of surface braid groups, *Ann. Inst. Fourier* 49 (1999), 101–156
- [107] R. C. Penner, J. L. Harer, Combinatorics of train tracks, *Annals of Mathematics Studies*, 125. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [108] B. Perron and D. Rolfsen, On orderability of fibred knot groups, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 135 (2003), 147–153.
- [109] A. Rhemtulla, D. Rolfsen, Local indicability in ordered groups : braids and elementary amenable groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002), 2569–2577.
- [110] D. Rolfsen, B. Wiest, Free group automorphisms, invariant orderings and applications, *Algebraic and Geometric Topology* 1 (2001), 311–319.
- [111] C. Rourke, B. Wiest, Order automatic mapping class groups, *Pacific J. Math.* 194 (2000), 209–227.
- [112] L. Sabalka, Embedding right-angled Artin groups into graph braid groups, , prépublication [arXiv :math.GR/0506253](https://arxiv.org/abs/math/0506253)
- [113] G. P. Scott, Compact submanifolds of 3-manifolds, *J. London Math. Soc.* 7 (1973), 246–250.
- [114] G. P. Scott, The geometries of 3-manifolds, *Bull. Lond. Math. Soc.* 15 (1983), 401–487.

- [115] H. Sibert, Extraction of roots in Garside groups, *Comm. Algebra* 30 (2002), no. 6, 2915–2927.
- [116] H. Short, An introduction to automatic groups. *Semigroups, formal languages and groups* (York, 1993), 233–253, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 466, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [117] H. Short, B. Wiest, Orderings of mapping class groups after Thurston. *Enseign. Math.* (2) 46 (2000), 279–312.
- [118] E. Souche, B. Wiest, An elementary approach to quasi-isometries of tree $\times \mathbb{R}^n$. *Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part II* (Haifa, 2000). *Geom. Dedicata* 95 (2002), 87–102.
- [119] W. P. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 19 (1988), 417–431.
- [120] W. P. Thurston, Braid Groups, Chapter 9 of “Word processing in groups”, D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Paterson and W. P. Thurston, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.
- [121] S. Wagon, The Banach-Tarski paradox. Corrected reprint of the 1985 original. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [122] B. Wiest, Dehornoy’s ordering of the braid groups extends the subword ordering, *Pacific J. Math.* 191 (1999), p. 183–188.
- [123] B. Wiest, An algorithm for the word problem in braid groups, preprint 2002, [arXiv :math.GT/0211169](http://arxiv.org/abs/math.GT/0211169)
- [124] B. Wiest, Diagram groups, braid groups, and orderability, *J. Knot Theory Ram.* 12 (2003), 321–332.
- [125] H. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic press (1990) ou sur [http ://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html](http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html)