

Chapitre 6 : Equations différentielles du second ordre

L'équation sans second membre

Exercice 6.1. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

- (a) $y'' - 8y' + 12y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
- (b) $y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- (c) $y'' - 4y' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
- (d) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$
- (e) $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

Exercice 6.2. Si l'on note $y(x)$ la position de la petite voiture dans le schéma suivant, en fonction du temps x , alors le mouvement peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2\mu y' + \omega_0^2 y = 0$$

où la constante μ (avec $\mu \geq 0$) s'appelle le *coefficient de frottement*, et ω_0 s'appelle la *fréquence propre* du ressort. Donnez toutes les solutions de cette équation. Indication : il faudra distinguer les cas $\mu > \omega_0$, $\mu = \omega_0$ et $\mu < \omega_0$. Donnez une interprétation physique.

L'équation avec second membre

Exercice 6.3. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes

- (a) $y'' + 2y' + 10y = 10x + 1$;
- (b) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 4x - 3$;
- (c) $y'' - 4y' = 8x$;
- (d) $y'' + y = e^{2x}$
- (e) $y'' + 9y = 5xe^{-x}$
- (f) $y'' + 5y' = e^{-5x}$.
- (g) $y'' - 2y' + y = xe^x$

Exercice 6.4. (Extrait de l'examen du 09/12/2008.)

- (a) Trouver toutes les solutions de l'équation : $y'' + 4y' + 5y = 1$.
- (b) Pour chaque solution $y(t)$ de cette équation déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

L'équation avec second membre et conditions initiales

Exercice 6.5. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

- (a) $y'' - 8y' + 12y = 4x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
- (b) $y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;
- (c) $y'' - 4y' + 5y = 10$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$;

Superposition des solutions

Exercice 6.6. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

- (a) $y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}$
- (b) $y'' - 10y' + 25y = \cosh(5x)$

COMPLÉMENTS

L'équation avec second membre exponentiel

Exercice 6.7. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

- (a) $y'' + y' + y = e^{3x}$
- (b) $y'' - 4y = e^{\alpha x}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- (c) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{3x} - 2e^{2x}$. (Extrait de l'examen de rattrapage de 08/09.)

L'équation avec second membre du type $P(x)e^{rx} \sin(ax)$ ou $P(x)e^{rx} \cos(ax)$

Exercice 6.8. Trouver les solutions des équations différentielles

- (a) $y'' + y = \cos(2x)$
- (b) $y'' + 3y' + y = \sin x$.

Exercice 6.9. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

- (a) $y' - 2y' + y = x \cos x$
- (b) $y'' + y = x \sin x$
- (c) $y'' - 2y = xe^{2x} \sin x$

Exercice 6.10. Trouver les solutions de l'équation différentielle suivante :

- (a) $y'' - 2y' + 10y = \sin(3x) + e^x$
- (b) $y'' + y = e^{2x} + x \sin(x)$.
- (c) $y'' + y = 2x \cos x \cos(2x)$.

Recollement

Exercice 6.11. (Plus difficile) On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$.

- (a) Déterminer les solutions polynomiales de (E).
- (b) À l'aide du changement de fonction $y = x^3u$ déterminer les solutions de (E) sur tout intervalle I ne contenant pas 0.
- (c) Résoudre (E) sur \mathbb{R} .