

Chapitre 5 : Equations différentielles du premier ordre

Champs de directions

Exercice 5.1. Pour chacune des équations différentielles suivantes, dessiner une esquisse du champ de directions dans la région $[-4,4] \times [-3,3]$ et dessiner approximativement le graphe de la solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$ pour quelques choix de x_0 et y_0 .

(a) $y' = 1 + x$ (b) $y' = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (c) $y' = 4y$ (d) $xy' + y = 0$

Résoudre ensuite chacune des équations différentielles.

Equations sans second membre

Exercice 5.2. En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

(a) $3y' = -y$ (b) $y' + y \sin x = 0$ (c) $y' - \frac{y}{\tan x} = 0$

Pour (c) : Existe-t-il une solution sur \mathbb{R} ?

Exercice 5.3. En précisant sur quel intervalle, résoudre l'équation différentielle

$(x^2 - 1)y' + xy = 0$ avec condition initiale :

(a) $y(2) = 1$; (b) $y(-2) = -3$; (c) $y(0) = 2$

Equations avec second membre

Exercice 5.4. En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

(a) $y'(1 + x^3) + x^2y = x^2$. (Indication : On cherchera une solution particulière évidente.)

(b) $xy' + y - \sin x = 0$. (Indication : On utilisera la méthode de la "variation de la constante" pour trouver une solution particulière.)

(c) $y' = 2y + x^3$. (Indication : On pourra chercher une solution particulière de la forme $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$.)

(d) $y' \cos x - y \sin x = 1$; $y(0) = 2$. (Indication : On utilisera la méthode de la "variation de la constante" pour trouver une solution particulière.)

Exercice 5.5. En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

(a) $y' - y = e^x - 1$, $y(1) = 2$;

(b) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y(1) = 1$;

(c) $y' - y \tanh x = x \cosh^2 x$, $y(0) = 2$;

COMPLÉMENTS

Exercice 5.6. (Extrait de l'examen de rattrapage de juin 09)

- (a) Trouver une primitive de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto te^{-t}$.
- (b) Trouver une primitive de la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)}$.
- (c) Trouver toutes les solutions de l'équation :

$$y' + \sin(x) \cdot y = \cos(x) \cdot \sin(x).$$

Exercice 5.7. (Extrait de l'examen de 07/08)

- (a) Résoudre sur $] - 1, 1[$ l'équation différentielle

$$\sqrt{1 - x^2} y' - y = 0.$$

- (b) Déterminer sur $] - 1, 1[$

$$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

(On pourra utiliser un changement de variables.)

- (c) Résoudre sur $] - 1, 1[$ l'équation différentielle

$$\sqrt{1 - x^2} y' - y = e^{2 \arcsin x}.$$

Exercice 5.8. (Extrait de l'examen de rattrapage de 07/08)

- (a) Résoudre sur $] 0, \infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = 0.$$

- (b) Déterminer sur $] 0, \infty[$

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$$

(On pourrait utiliser un changement de variables.)

- (c) Résoudre sur $] 0, \infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = e^{\frac{2}{x}}.$$

Recollement

Exercice 5.9. (a) Résoudre l'équation différentielle $(x + 1)y' - 2y = (x + 1)^4$ sur $] - \infty, - 1[$ et sur $] - 1, + \infty[$.

- (b) Existe-t-il des solutions sur \mathbb{R} ?