Chapitre 4 : Calcul intégral

Intégrale et aire

Exercice 4.1. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-2|\, dx$.

Tableau de primitives

Exercice 4.2. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes.

(a) $(3x^2+4x-2)$ (b) $\sqrt{3x-1}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ (e) e^{2x+3} (f) 2^{-x}

Linéarisation

Exercice 4.3. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\left(x^3-2\right)^2$ (b) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)^2$ (c) $\cos^2(x)$ (d) $\sin(2x)\sin(5x)$

Intégration par parties

Exercice 4.4. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2} x^2\cdot e^x\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{e} x\cdot(\ln(x))^2\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{x}\cdot\ln(\sqrt{x})\, dx$

Exercice 4.5. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $x\cdot\sinh(x)$ (b) $x^2\cdot\cosh(3x)$ (c) $\arctan(x)$ (d) $e^x\sin(x)$

Changement de variables

Exercice 4.6. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_3^4 x(x^2-6)^{\frac{4}{3}}\ dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^7(x)\ dx$ (c) $\displaystyle\int_2^3 x\cdot\exp(x^2-2)\ dx$

Exercice 4.7. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $3x^2(x^3+4)^{20}$ (b) $\dfrac{x^2}{2x^3+5}$ (c) $x^2\cos(2x^3)$

(d) $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$ (e) $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$

Exercice 4.8. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2\exp(x^3)\ \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cdot\cos^2(x)\ \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sqrt{\sin(x)}\ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2}\ \mathrm{d}x$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 4.9. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{7}{x^2-5x-6}$ (b) $\dfrac{2x+2}{x^2-5x-6}$ (c) $\dfrac{3}{x^2+4x+13}$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Exercice 4.10. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{1}{\cosh x}$ (Indication : $u = e^x$.) (b) $\dfrac{1}{\tan(x)(\sin(x)+1)}$ (Indication : $u = \sin(x)$.)

(c) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}$ (Indication : $u = e^x$.)

Resumé des techniques d'intégration

Exercice 4.11. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \cdot \arctan(x)\ dx$ (Indication : intégration par parties.)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arccos(x)\ dx$ (Indication : intégration par parties.)

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x)\cos^3(x)\ \mathrm{d}x.$

Exercice 4.12. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\cosh(2x)\cosh(3x)$ (b) $\dfrac{\ln^3 x}{x}$ (c) $\ln(x^2-1)$ (Indication : $v'=1$.)

(d) $\dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}$ (e) $\dfrac{x+1}{e^x}$ (f) $x^2\sqrt{1+x^3}$ (g) $\dfrac{1}{\sinh(x)}$

COMPLÉMENTS

Intégrale et aire

Exercice 4.13. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (3x-2)\ dx\,;$ (b) $\displaystyle\int_{-4}^{3} |(|x-2|-|x+2|)|\ dx.$

Exercice 4.14. Calculer les intégrales ci-dessous, et en déduire la valeur de certaines aires.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sinh(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(2x)\ dx$

Linéarisation

Exercice 4.15. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\left(\sqrt{x}+x^2\right)^3$ (b) $\sin(x)\cos(x)$ (c) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2.$ (d) $\sinh^2(x)$

Intégration par parties

Exercice 4.16. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :
(a) $x^2 \cdot \cos(x)$ (b) $x \cdot \cos^2(x)$ (c) $(x+1) \cdot e^x \cdot \ln(x)$ (d) $\ln(x)$ (e) $e^{ax}\cos(bx)$

Exercice 4.17. Soit

$$I_n := \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n \, dx.$$

Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. Puis calculer $\displaystyle\int_1^e x \cdot (\ln(x))^4 \, dx$.

Exercice 4.18. Soit

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx.$$

En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)$, démontrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x) \, dx$.

Exercice 4.19. Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} \, dx.$$

dans le cas où $n = 3$.

Changement de variables

Exercice 4.20. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $(x^2+1)\sqrt[3]{x^3+3x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{4+x^6}$ (c) $2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(2x)}$

Exercice 4.21. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $\sqrt{2-x^2}$ (b) $\sqrt{1+2x-x^2}$ (c) $\sqrt{x^2-4}$
(d) $\sqrt{x^2+4x-5}$ (e) $\sqrt{2x^2+32}$ (f) $\sqrt{2x^2-4x+4}$

Exercice 4.22. Calculer

$$\int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x \sqrt[3]{1+e^x} \, dx$$

Exercice 4.23. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}$ (b) $\dfrac{1}{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-9x^2}}$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ (f) $\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ (g) $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (h) $\sqrt{4x^2-8x+24}$

Exercice 4.24. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)+\sin^2(x)}}$ (b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 4.25. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(a) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$ (b) $\dfrac{3x-1}{x^2+4x+4}$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(c) $\dfrac{1}{e^x+2e^{-x}}$ (Indication : $u = e^x$.) (d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (Indication : $u = 1+\sqrt{x}$.)

(e) $\dfrac{\sin x \cdot \cos x}{(2+\sin x)^2}$ (Indication : $u = 2+\sin x$.) (f) $\dfrac{1}{e^{2x}-e^x-2}$.

Exercice 4.26. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$).

(a) $\dfrac{1}{5+3\cos(x)}$ (b) $\dfrac{1}{\cos(x)+\sin(x)+2}$

Exercice 4.27. Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$).

$$(a)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}\,dx \qquad (b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+3\cos(x)-\sin(x)}\,dx$$

Fonction définie par une intégrale

Exercice 4.28.

1. Soit f une fonction continue sur un intervale I, $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions dérivables et F une primitive de f. Montrer que la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx$$

   est $f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)$. Indication : Utiliser $G(t) = F(b(t)) - F(a(t))$.

2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{t^2}^{t^3} e^x \, dx.$$

   (a) Intégrer d'abord, puis dériver.

   (b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.