Chapitre 3 : Étude des fonctions

Domaine de définition

Exercice 3.1. Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :
(a) $\tan(2x)$, (b) $\ln(1-x)$, (c) $\ln(1-x^2)$ (d) $\sqrt{x^2-3x-4}$ (e) $\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$.

Composées de fonctions

Exercice 3.2. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle données par

$$f(x) = \frac{3}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2-x}{2+x}.$$

(a) Trouver le domaine de définition ainsi que l'image de f et de g.
(b) Déterminer les antécédents de 0 et -2 par f et de 0 et -2 par g.

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions numériques d'une variable réelle donées par

$$f_1(x) = f(f(x)), \quad f_2(x) = f(g(x)), \quad f_3(x) = g(f(x)) \quad \text{et} \quad f_4(x) = g(g(x)).$$

(c) Déterminer le domaine de définition de f_i, $i = 1, \ldots, 4$.
(d) Trouver une expression simplifiée de f_i, $i = 1, \ldots, 4$.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 3.3. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $|2x-5| = 4$, (b) $|2x+4| < 3$, (c) $|x^2+5x| \geq 2$.

Fonction logarithme, exponentielle, puissance

Exercice 3.4. Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

(a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$, (b) $\log_9\left(\dfrac{1}{27}\right)$ (c) $\ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x))$.

Exercice 3.5. (Extrait du contrôle 2 du 14/10/2009)
Résoudre l'inéquation

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0.$$

Exercice 3.6. (Extrait du contrôle 2 du 14/10/2009)
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\text{(a)}\ \ln\left(\frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}\right) \qquad \text{(b)}\ \left(\frac{x^2-2x}{x^2+4x+3}\right)^\alpha, \quad \text{pour } \alpha \in]0{,}1[.$$

Fonctions hyperboliques

Exercice 3.7.

(a) Exprimer $\sinh(3x)$ à l'aide de $\sinh(x)$.

(b) Montrer en utilisant la définition du cosh et sinh que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(c) Simplifier l'expression suivante autant que possible :

$$\frac{\cosh(\ln(x)) - \sinh(\ln(x))}{\cosh(\ln(x)) + \sinh(\ln(x))}.$$

Symétrie

Exercice 3.8. Parmi les fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?

(a) $5x^4 - 3x^2$, (b) $2x^4 - x^3 + 1$, (c) $\sin(x^3)$, (d) $\sin^2(x^3)$, (e) $\mathrm{e}^{|x|}$,

(f) $\ln(|x|)$, (g) $\tan(\sin(x))$, (h) $\mathrm{e}^{\sin(x)}$ (i) $\sin(\ln(x))$. (j) $\cosh(x) + e^{x^2} - x^4$.

Exercice 3.9.

(a) Montrer que le graphe de la fonction donnée par la formule $f(x) = x^2+2x+3$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$.

(b) Montrer que le graphe de la fonction donnée par la formule $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$ est symétrique par rapport au point $M(1, -5)$.

Exercice 3.10. Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.

(a) si f et g sont impaires alors la composition $f \circ g$ est impaire.

(b) si g est paire alors $f \circ g$ est paire.

(c) si f est paire et g est impaire alors $f \circ g$ est paire.

Limite

Exercice 3.11. Décrivez le comportement limite des fonctions numériques d'une variable réelle, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$\text{(a)}\ \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad x=0 \qquad \text{(b)}\ \exp\left(\frac{|x|}{x}\right), \quad x=0 \qquad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, \quad x=1.$$

Exercice 3.12. Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

(a) $\lim_{x\to 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, (b) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos(x)$, (c) $\lim_{x\to 1} |x-1|\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$, (d) $\lim_{x\to+\infty} \exp(\sin(x)-x)$.

Exercice 3.13. Utilisez un changement de variable pour évaluer les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})}.$$

Exercice 3.14. Évaluez les limites suivantes

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1}$, (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2}$,

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1-x^2}$, (e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4}$, (f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2\ln x}$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x+2}$ (h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}}$ (i) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$

(j) (Extrait de l'examen du 9/12/2008) $\lim_{x\to 0} \frac{((1+x)^{12}-1)\sin x}{1-\cos x}$.

Branche infinie

Exercice 3.15. Etudier l'existence d'une direction asymptotique et l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ des graphes des fonctions données par les formules

(a) $f_1(x) = x^2+3x$ (b) $f_2(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ (c) $f_3(x) = \ln(\sinh^2 x - \sinh x + 1)$

(d) $f_4(x) = x^2\sin(x)$ (e) $f_5(x) = 2x+\sin(x)$ (f) $f_6(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$

Définition de la dérivée

Exercice 3.16. Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

Opérations algébriques de la dérivée

Exercice 3.17. Pour chacune des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $8x^{3/4}$ (b) $xe^{\frac{1}{x}}$ (c) $\mathrm{e}^x\sin(x)$ (d) $\frac{1-4x}{x^{2/3}}$ (e) $\frac{\mathrm{e}^x\ln(x)}{x^2+2x^3}$ (f) $3^x\sin(x)$

(i) donner un sous-ensemble du domaine de définition ou la fonction en question est dérivable et (ii) utiliser les règles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, et d'un quotient pour trouver la dérivée.

Exercice 3.18. En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\cos(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{x+\mathrm{e}^x}$ (c) $\cosh(x\ln(x))$ (d) 2^{-x}

(e) $\ln(\ln(\ln(x)))$ (f) $\ln(x\sin(x))$ (g) $2^{x\sin(x)}$

Règle de l'Hôpital

Exercice 3.19. Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos(a\,x)}{x^2}\right)$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Extrémum

Exercice 3.20. Soit $f(x)=|x^2-4|$.

(a) Déterminer les points critiques de f.

(b) Déterminer les minima, maxima locaux et globaux de $f(x)$.

Exercice 3.21. Déterminer (s'ils existent) les minima, maxima locaux et globaux de

(a) $(x^2-1)^2$ (b) $x^2\exp\left(-x^2\right)$.

Exercice 3.22. Pour chacune des fonctions numériques données par les formules et les domaines de définitions ci-dessous, trouver les maxima et minima locaux et globaux.

(a) $x^2+2x-3,\quad -2\leqslant x\leqslant 2$ (b) $\displaystyle\frac{2x+1}{x^2+2},\quad -3\leqslant x\leqslant 3$

Accroissements finis

Exercice 3.23. Pour $n\geq 0$ un entier, on considère $f(x)=x^n$. Soient $a{,}b$ deux réels avec $a<b$.

(a) On suppose que $n=0$. Déterminer l'ensemble des $c\in]a{,}b[$ tels que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(b) Même question pour $n=1$.

(c) Même question pour $n=2$.

(d) (Plus difficile) Traiter le cas n quelconque.

Exercice 3.24. Soit $f(x)=|x|$, et $a{,}b$ deux réels avec $a<b$.

(a) Déterminez l'ensemble E des points x où f est dérivable.

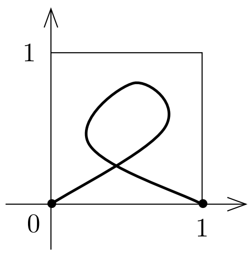
(b) Existe-t-il $c\in E$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$? (On pourra distinguer plusieurs cas, selon que a et b sont de même signe ou non).

Exercice 3.25. Soit $f(x) = \arctan(x)$, $a = 0$, $b = 1$. Déterminer si il existe $c \in]a,b[$ (et le cas échéant le déterminer) tel que

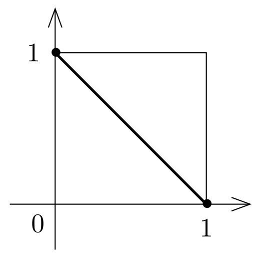
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Applications, Injections, surjections

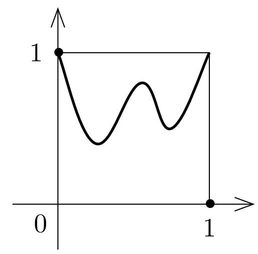
Exercice 3.26. Dans chacun des cas suivants indiquer s'il s'agit du graphe d'une application, injection, surjection de [0,1] dans [0,1].



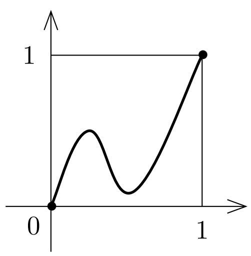
(a)



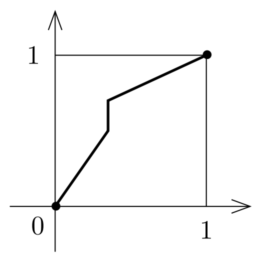
(b)



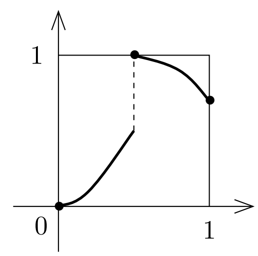
(c)



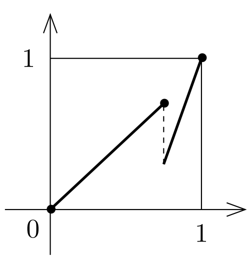
(d)



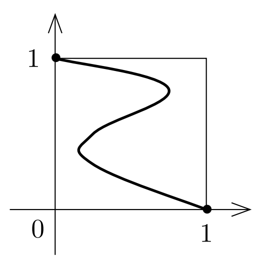
(e)



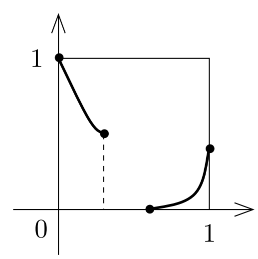
(f)



(g)



(h)



(i)

Fonctions convexes, fonctions concaves

Exercice 3.27. Que dire d'une fonction à la fois convexe et concave sur un intervalle ?

Exercice 3.28. Après avoir déterminé son ensemble de définition, montrez que $f(x) = \ln(1+e^x)$ est convexe, puis déterminez ses éventuelles asymptotes avant de tracer son graphe

Exercice 3.29. (a) Montrez, à l'aide d'une propriété de convexité, que

$$\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$

(b) Démontrez que la fonction $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ est convexe, et tracez l'allure de son graphe.

Inégalités

Exercice 3.30. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$$

Fonction réciproque

Exercice 3.31. Soit f la fonction donnée par la formule

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

(a) Déterminez le domaine de définition D_f et l'image de f.

(b) Trouver un domaine $D \subset D_f$ tel que f est une bijection entre D et son image.

(c) En citant un théorème du cours, montrer que f admet une fonction réciproque. Quel est son domaine de définition, son image ? Que peut-on dire sur la continuité de cette dernière ?

(d) Tracez la fonction et sa réciproque dans un même repère.

(e) Trouvez l'expression de la fonction réciproque.

Exercice 3.32. Pour chacune des fonctions numériques donnés par les formules suivantes :

$$f(x) = \sinh(x) \qquad g(x) = \cosh(x) \qquad h(x) = \mathrm{e}^{x^2}$$

(a) montrer qu'après une réstriction approprié du domaine de définition elle admet une fonction réciproque qui est continue.

(b) étudier la dérivabilité de la fonction réciproque et déterminer cette dérivée.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 3.33. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\sin(\arcsin(x)), \quad x \in \mathbb{R}$; (b) $\arcsin(\sin(x)), \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

(c) $\arcsin(\sin(x)), \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; (d) $\arcsin(\sin(x)), \quad x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$;

(e) $\cos(\arcsin(x))$

Exercice 3.34. Utilisez un changement de variable pour évaluer les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin(x)}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to -\infty} \frac{\arcsin(\exp(x))}{\exp(x)}.$$

Exercice 3.35. Etudier les branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$ du graphe de la fonction donnée par

$$x + \arctan(\frac{x^2+1}{x-1}).$$

Exercice 3.36. Donner le domaine ou les fonctions suivantes sont dérivables et déterminer la dérivée sur ce domaine :

$$\text{(a)} \frac{x}{\ln x} + \arcsin(x^2); \qquad \text{(b)} \arctan(\frac{x+1}{x}); \qquad \text{(c)} \arccos(2x^2-1).$$

Etude complète de fonction

Exercice 3.37. Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ (b) $f(x) = \ln(\cosh x)$ (c) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

(d) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ (e) $f(x) = \sinh\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (Contrôle continue du 4/11/2010).

COMPLÉMENTS

Domaine de définition

Exercice 3.38. Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

(a) $x^5 - 3x^2 + 2x - 7$, (b) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$, (c) $|\ln(x)|$,

(d) $\dfrac{1}{\sin(2x)}$, (e) $\dfrac{1}{x\,\cos(x)}$, (f) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

Composées de fonctions

Exercice 3.39. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
On suppose que $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $(f \circ g)(x) = 3x - 4$. Déterminer $g(x)$.

Exercice 3.40. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
On suppose que $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = 2x + 1$. Déterminer f.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 3.41. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $|x^2 - 2x - 5| = 1$, (b) $|x^3 - 1| = 7$, (c) $|2x^2 - 5x - 4| \leq 3$.

Exercice 3.42. Tracer le graphe des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

(a) $|x^2 - 5x + 6|$, (b) $|\sin(2x)|$.

Exercice 3.43. Tracer le graphe de la fonction numérique d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

Limite

Exercice 3.44. Trouvez des exemples de fonctions paires f, g satisfaisant les conditions suivantes lorsque $x \to +\infty$:

1. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ et $f(x) - g(x) \to 0$;
2. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ et $f(x) - g(x) \to +\infty$;
3. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ et $f(x) - g(x) \to -\infty$;
4. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ et $f(x) - g(x) \to 3$.

Exercice 3.45. Décrivez le comportement limite des fonctions numériques d'une variable réelle, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

(a) $\mathrm{Ent}(\sqrt{x}), \quad x = 9$ (b) $\dfrac{|\sin(x)|}{\sin(x)}, \quad x = \pi$ (c) $\dfrac{\tan(x)}{|x|}, \quad x = 0.$

Exercice 3.46. Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$\text{(a)} \lim_{x\to-\infty} \exp(x)\sin(x^2+1), \qquad \text{(b)} \lim_{x\to+\infty} (1 - \tanh(x))\cos(x).$$

Exercice 3.47. Évaluez les limites suivantes, en utilisant des manipulations algébriques.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2+6x-7}{x^2-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x+1}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{\sqrt{5+x}-2}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+2x^2+1}{2x^4-3x^3+x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-1}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-x-1}{2x+3}$,

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+\cos^2(x)}{2x^2-\sin^2(2x)}$, (j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)-\sin(x)+1}{2\exp(x)+\cos(x)-3}$. (k) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{|2x-5|}{3x+1}$,

Exercice 3.48. Donner la limite en 0_+ des fonctions données par les formules

(a) $2x\ln(x+\sqrt{x})$ (b) $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Exercice 3.49. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction donnée par

(a) $\left(\dfrac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$ (b) $\dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

Exercice 3.50. Soit f une fonction bornée, c'est-à-dire qu'il existe des constantes A et B telles que $A \leq f(x) \leq B$ pour tout x dans le domaine de f.
Montrer par encadrement (théorème des gendarmes) que $\lim_{x\to0} f(x)\sin(x) = 0$.

Branche infinie

Exercice 3.51. Décrivez les comportements limites près des asymptotes verticales de

$$x \mapsto \frac{(x+1)(x-2)^2}{x(x-1)(x+2)^2}$$

Définition de la dérivée

Exercice 3.52. Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$\text{(a)} \quad x^3 \qquad\qquad \text{(b)} \ \ x^{-1}$$

Exercice 3.53. En admettant la dérivabilité en 0, établir la dérivabilitée sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$\text{(a)} \ \ \cos(x) \qquad\qquad \text{(b)} \ \ \tan(x) \qquad\quad (c) \quad \mathrm{e}^x$$

Opérations algébriques de la dérivée

Exercice 3.54. Pour chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$\text{(a)} \ \ x^2\tan(x) \qquad \text{(b)} \ \ \frac{3x-2}{2x-3} \qquad \text{(c)} \ \ \frac{x^2+2x}{x^2-1} \qquad \text{(d)} \ \ \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)} \qquad \text{(e)} \ \ \frac{\mathrm{e}^x}{1-\tan(x)}$$

(i) donner un sous-ensemble du domaine de définition ou la fonction en question est dérivable et
(i) utiliser les règles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, et d'un quotient pour trouver la dérivée.

Exercice 3.55. Utiliser la règle concernant la dérivée d'une composée pour trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$\text{(a)} \ \ \cosh(\cos(x)) \qquad \text{(b)} \ \ \tan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(c)} \ \ \sin(2\cos(3x)) \qquad \text{(d)} \ \ 3^{3^x}$$

Exercice 3.56. En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$\text{(a)} \ \ \sin\left(\frac{x}{\cos(x)}\right) \qquad \text{(b)} \ \ \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2} \qquad \text{(c)} \ \ a\sin(bx)+b\sin(ax)$$

Dérivée et parité

Exercice 3.57. On rappelle que la dérivée d'une fonction impaire est paire, et la dérivée d'une fonction paire est impaire.

(a) Expliquer ce résultat à l'aide de graphes.

(b) Démontrer les affirmations en comparant les dérivées de $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$.

(c) Démontrer les affirmations en utilisant directement la définition de la dérivée en tant que limite.

(d) Pensez-vous que les affirmations réciproques sont vraies ? C'est-à-dire, toute fonction paire (resp. impaire) est-elle la dérivée d'une fonction impaire (resp. paire) ? Si oui, en donner une démonstration. Sinon, donner un contre-exemple.

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 3.58. Calculer les premiéres dérivées d'ordre supérieur de la fonction donnée par $f(x) = \sin(2x-5)$. En se basant sur les formules ainsi obtenues, deviner des formules générales pour $f^{(2n)}(x)$ et $f^{(2n+1)}(x)$. Démontrer ces formules par récurrence.

Difficile : Trouver une formule générale qui englobe les deux formules trouvées précédemment.

Exercice 3.59. Calculer plusieurs dérivées successives de la fonction donnée par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$. Deviner les formules générales pour $f^{(4n)}(x)$, $f^{(4n+1)}(x)$, $f^{(4n+2)}(x)$, $f^{(4n+3)}(x)$. Les démontrer par récurrence.

Exercice 3.60. Utiliser la formule de Leibniz pour déterminer la dérivée n-ième de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a) \quad x\ln(x) \qquad (b) \quad (x^2-2x+3)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad (c) \quad x^3\,\mathrm{e}^{-x}$$

Règle de l'Hôpital

Exercice 3.61. Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes :

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(a\,x)-1}{\cos(b\,x)-1} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)}{x-\tan(x)}$$

Extrémum

Exercice 3.62. Déterminer (s'ils existent) les minima, maxima locaux de

(a) $x^4+4x^3-2x^2-12x-5$ (b) $\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$ (c) $\ln(1+x+x^2)$

(d) $x^{4/3}-2x^{2/3}$ (e) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^6}}$

Exercice 3.63. Pour chacune des fonctions numériques données par les formules et les domaines de définitions ci-dessous, trouver les maxima et minima locaux et globaux.

(a) $x(x+1)^2, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$ (b) $x\sqrt{3-x^2}, \quad -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$

(c) $x-2\sin(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (d) $\dfrac{\cos(x)}{2+\sin(x)}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

(e) $\dfrac{\ln(x)}{x^2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$ (f) $\dfrac{1}{\cosh(x-1)}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$ (g) $\cos(2x)+2\sin(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

(h) $x \cdot 3^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

Inégalités

Exercice 3.64. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x$$

Fonction réciproque

Exercice 3.65. Soit f la fonction donnée par la formule

$$\frac{2x}{3x-1}.$$

Déterminez le domaine de définition et l'image de f et décider si f est injective ou non.
Lorsque f est bijective, trouvez l'expression de la fonction réciproque et déterminez le domaine de définition et l'image de cette dernière. Puis tracez la fonction et sa réciproque dans un même repère.

Exercice 3.66. Trouver une formule pour l'inverse de la fonction f donné par :

$$x \mapsto f(x) = 5 - 12x - 2x^2, \quad \text{si} \quad x > -3.$$

Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un même graphique.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 3.67. Trouvez des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\arctan(x) \neq \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$

Exercice 3.68. Simplifier les expressions suivantes autant que possible.

(a) $\coth(\ln(x)$, (b) $\sin(\arctan(x))$.

Etude complète de fonction

Exercice 3.69. Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

(a) $g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$, (b) $h(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$ (c) $h(x) = (\cosh x)^{\frac{1}{x}}$

(d) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. (e) $f(x) =| x^2 - 2x |^{\frac{1}{2}}$

Applications des fonctions

Exercice 3.70. Dans la théorie des circuits électriques, il y a une fonction appelée la fonction de Heaviside, baptisé du nom du physicien Oliver Heaviside (1850-1925), définie comme suit :

$$H(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } t \geq 0, \\ 0, \text{ si } t < 0, \end{cases}$$

elle représente l'entrée d'un circuit qui est alimenté au temps $t = 0$. Il s'agit d'une fonction définie par deux morceaux pour laquelle un symbole simple est employé.

Que représente la fonction $t \mapsto H(-t)$? Que représente $t \mapsto H(t-1)$? Quel est le graphique de $t \mapsto H(t) - H(t-1)$?

Vous pouvez employer ceci comme un point de départ pour une autre recherche sur des fonctions définies ayant des formules simples. Ces fonctions sont en fait employées en liaison avec des transformées de Laplace pour résoudre des équations différentielles liées aux circuits électriques.

Géométrie, Optimisation

Exercice 3.71. La tangente au graphe de la fonction $x \mapsto x^3$ en un point P intersecte la courbe encore une fois en un autre point Q.
Déterminer les coordonnées de Q, en fonction des coordonnées de P.

Exercice 3.72. On considère l'hyperbole d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Trouver les points sur cette hyperbole qui sont les plus proches du point $(0,a)$ sur l'axe des ordonnées.

Exercice 3.73. On veut fabriquer une boîte en carton (quatre côtés et un fond, mais pas de couvercle) à partir d'une feuille de carton rectangulaire de un métre sur deux métres. Pour ceci, on découpe quatre carrés de dimension $\ell \times \ell$ aux quatre coins de la feuille. Ensuite, on plie la feuille et recolle les côtés de la façon naturelle pour obtenir une boîte. Trouver la valeur de ℓ pour laquelle la boîte est de volume maximal.

Exercice 3.74. L'aire d'un cône circulaire droit doit être de 4m^2. Trouver les dimensions du cône pour lesquelles le volume est maximal.
On rappelle que le volume et l'aire d'un cône circulaire droit de hauteur h et de base circulaire de rayon r valent respectivement $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ et $A = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2})$.

Exercice 3.75. On veut construire des silos en acier pour des graines, qui doivent avoir un volume de 2000m^3. Les silos reposent sur une base en béton, et ils sont formés d'un cylindre en acier et d'un couvercle hémisphérique, également en acier. La production d'un hémisphère en acier coûte trois fois plus cher, par unité d'aire, qu'un cylindre. Trouver le rayon du cylindre pour lequel le coût de production est minimal.

Exercice 3.76. Un TGV fait un long trajet. Pendant un certain segment de 1000km il roule à une certaine vitesse constante $v$km/h. Le coût de l'électricité par heure à cette vitesse est de

$$C(v) = 2048 + v^{3/2}.$$

Déterminer la vitesse à laquelle le train doit rouler pendant ce segment du trajet pour minimiser le coût de l'électricité.