

Chapitre 2 : Polynômes et fractions rationnelles

Division euclidienne

Exercice 2.1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B , dans chacun des cas suivants :

- (a) $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^4 - 2x^2 - 1$
- (b) $A(x) = x^3 + 1$, $B(x) = x + 2$
- (c) $A(x) = x^5 - x^3 + x - 1$, $B(x) = x^2 + x - 3$
- (d) $A(x) = x^4 - 1$, $B(x) = x^2 + (1 - i)x - i$

Résolution d'équations

Exercice 2.2. Soit $P(z) = z^5 + 9z^4 + 32z^3 + 56z^2 + 48z + 16$.

- (a) Démontrer que -2 est une racine du polynôme P .
- (b) Déterminer la multiplicité, disons m , de cette racine P .
- (c) Effectuer la division euclidienne de P par $(z + 2)^m$.

Exercice 2.3. Soit $P(z) = z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-3 + 5i)z + 6 + 2i$.

- (a) Trouver la racine réelle a de P et effectuer la division euclidienne de P par $z - a$.
- (b) Déterminer toutes les racines de P .

Exercice 2.4. Résoudre dans \mathbb{C} :

- (a) $z^4 + z^2 - 20 = 0$;
- (b) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Exercice 2.5. Factoriser sur \mathbb{C} les polynômes suivants

- (a) $z^3 + z^2 - 4z - 4$
- (b) $z^3 + 2z^2 - 23z - 60$
- (c) $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 2.6. Factoriser sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} les polynômes :

- (a) $z^6 - 1$;
- (b) $z^4 + 2z^2 + 4$;

COMPLÉMENTS

Exercice 2.7. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q , dans chacun des cas suivants :

- (a) $P(x) = x^6 - 1$, $Q(x) = x^2 - x - 2$,
- (b) $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$, $Q(x) = 2x^2 + 5$,
- (c) $P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + x$, $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3$.

Exercice 2.8. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- (a) $2iz + 5 = 3 + 2i$ (b) $1 - 2iz + 4z = 3i(1 + 5i)$ (c) $(z + i)(z - 5) = z^2 - i$
- (d) $(z - 3i)(2z - 1) = 1 - 4z^2$ (e) $z^2 = -1$ (f) $z^2 + 9 = 0$ (g) $z^4 + 2z^2 = 0$

Exercice 2.9.

- (a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 - 1 = 0$.
- (b) Développer le produit $(z - 1)(z^3 + z^2 + z + 1)$.
- (c) Quelles sont les solutions dans \mathbb{C} , de l'équation $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$?

Exercice 2.10. Factoriser le polynôme $x^3 + x^2 - x - 1$

Exercice 2.11. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z - 2)^n + (z + 2)^n = 0$

Exercice 2.12. Résoudre dans \mathbb{C}

- (a) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$ (b) $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$

Exercice 2.13. Soit $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que, si z_0 est racine de P , alors son conjugué \bar{z}_0 est aussi racine de P .

Exercice 2.14. On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

- (a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est de même de $\bar{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.
- (b) Calculer $P(1 + i)$. Déduire alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$.
- (c) Écrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.