Université de Rennes 1 — Année 2015–2016
Module OM2, Groupe 5

Contrôle continu
Mardi 29 mars 2016, 11h45 – 12h15

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1 Calculer le déterminant des matrices suivantes

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Que peut-on dire sur le parallelogramme engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$? $15 - 12 = 3$. Le parallelogramme est d'aire 3.

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Utiliser la règle de Sarrus. $12 - 12 = 0$. Remarque (pas exigé pour l'examen) : cela dit que les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans un plan dans $\mathbb{R}^3$, ils sont "co-planaires".

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Dévéloppez suivant une ligne ou colonne de votre choix. Le plus simple est de dévélopper suivant la deuxième colonne. Résultat $-2 \cdot 3 = -6$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ Transformez la matrice en forme triangulaire. Ramplacer III par III$-$I (ce qui ne change pas le déterminant) donne $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Le déterminant est donc $2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$

(e) $E = C \cdot D$. (Indication : quasiment pas de calcul !) $-6 \cdot 10 = -60$

Exercice 2 Applications linéaires

(a) Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire qui vérifie

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f, et calculer $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une déscription géométrique de cette application. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse et donner une interprétation géométrique. Rotation de $\frac{\pi}{2}$ (dans le sens des aiguilles). Son inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représente une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans l'autre sens.

(c) Donner la matrice de l'application linéaire représentant une symétrie dans l'axe $y = -x$. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse et donner une interprétation géométrique. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme toute symétrie axiale, cette application est égale à son propre inverse (c.à.d. si l'on applique A deux fois, on obtient l'application identité). Donc $A^{-1} = A$.