Université de Rennes 1 — Année 2015–2016

Module OM2, Groupe 5

Contrôle continu
Mardi 8 mars 2016, 11h45 – 12h15

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1 (a) Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} -x + y + z + 5w = 1 \\ \quad\;\; y + 6z + 2w = 3 \\ -x + 2y + 7z + 7w = 4 \end{cases}$$

La forme réduite du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc les solutions sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

(b) Déterminer (sans calcul supplémentaire) le noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 (a) Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Réponse : une seule solution, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez la matrice inverse A^{-1}, et le produit $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(c) Expliquez pourquoi vous avez obtenu la même réponse en (a) et en (b). Prenons l'équation

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En mulitpliant les deux membres à gauche par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ on obitient l'équation équivalente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Calculez, si possible, les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas inversible, car $ad - bc = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$. Pour la matrice B, un petit calcul donne

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Calculez, si possible le produit de deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$