Université de Rennes 1
Module ANA

Année 2015–2016

Examen Terminal
17 décembre 2015, 14h – 16h

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Une rédaction soignée est attendue. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^2 + (4+2i)z + 8i = 0$$

Solution : $z = -2 - i \pm (2-i)$, donc $z = -2i$ ou $z = -4$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes (si elles existent).

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x\cdot\cos(x)}{2x^2+1}$. Réponse : $= \frac{3}{2}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}$. Réponse : en appliquant la règle de l'Hôpital deux fois on trouve $= -\frac{1}{2}$.

Exercice 3 Dans cet exercice vous pouvez admettre sans démonstration que pour tout nombre réel x on a $\exp(x) - x > 0$. Soit f la fonction définie par la formule

$$f(x) = \ln\left(\exp(x) - x\right)$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Réponse : tout $\mathbb{R}$, par la première phrase de l'énoncé.

(b) Calculer la dérivée f' de f, et étudier son signe. Réponse : $f'(x) = \frac{\exp(x)-1}{\exp(x)-x}$, qui est négatif pour $x < 0$ et positif pour $x > 0$.

(c) Déterminer la direction asymptotique de f pour $x \to -\infty$. Déterminer aussi la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (si elle existe). Réponse : on a $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (ceci est difficile à justifier rigoureusement !). En plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (parce que $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \exp(x) - \lim_{x\to-\infty} -x = -\infty$). On peut conclure (mais ce n'était pas demandé) qu'il n'y a pas d'asymptote quand $x \to -\infty$.

(d) Démontrer qu'en $+\infty$ la fonction a une asymptote d'équation $y = x$. Réponse : $\ln(\exp(x)-x)-x = \ln(\exp(x) - x) - \ln(\exp(x)) = \ln(\frac{\exp(x)-x}{\exp(x)}) = \ln(1 - \frac{x}{\exp(x)}) \xrightarrow{x\to+\infty} \ln(1) = 0$

(e) Résumer ces résultats dans un tableau de variations. Dessiner aussi le graphe de la fonction f.

Exercice 4

(a) En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives de la fonction donnée par la formule $x\cdot\cos(2x)$. Réponse : par intégration par parties on trouve $= \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$

(b) Calculer l'intégrale

$$\int_1^e \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2(x))} \, dx$$

Réponse : avec le changement de variable $u = \ln(x)$ on obtient $= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \, du = [\mathrm{Arctan}(u)]_{u=0}^{u=1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 Regardons l'équation différentielle

$$u'' - 5u' + 6u = e^x$$

(a) Trouver toutes les solutions de cette équation différentielle. Réponse : $u(x) = \frac{1}{2}e^x + c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Exhiber une solution satisfaisant les conditions initiales $u(0) = \frac{1}{2}$ et $u'(0) = -\frac{1}{2}$. Y a-t-il unicité d'une telle solution ? Réponse : $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. La solution est unique – ceci a été vu en cours.