Université de Rennes 1 | Année 2014-2015
UFR Mathématiques | MIEE L1, Module ANA

Chapitre 5

Champs de directions

Exercice 1. Pour chacune des équations différentielles suivantes, dessiner une esquisse du champ de directions dans la région $[-4{,}4] \times [-3{,}3]$ et dessiner approximativement le graphe de la solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$ pour quelques choix de x_0 et y_0.

(a) $y' = 1 + x$ (b) $y' = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ (c) $y' = 4y$ (d) $xy' + y = 0$

Résoudre ensuite chacune des équations différentielles.

Equations sans second membre

Exercice 2. En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

(a) $3y' = -y$ (b) $y' + y\sin x = 0$ (c) $y' - \dfrac{y}{\tan x} = 0$

Pour (c) : Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3. En précisant sur quel intervalle, résoudre l'équation différentielle $(x^2 - 1)y' + xy = 0$ avec condition initiale :

(a) $y(2) = 1$; (b) $y(-2) = -3$; (c) $y(0) = 2$

Equations avec second membre

Exercice 4. En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

(a) $y'(1 + x^3) + x^2y = x^2$. (Indication : On cherchera une solution particulière évidente.)

(b) $xy' + y - \sin x = 0$. (Indication : On utilisera la méthode de la "variation de la constante" pour trouver une solution particulière.)

(c) $y' = 2y + x^3$. (Indication : On pourra chercher une solution particulière de la forme $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$.)

(d) $y'\cos x - y\sin x = 1$; $y(0) = 2$. (Indication : On utilisera la méthode de la "variation de la constante" pour trouver une solution particulière.)

Exercice 5. En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

(a) $y' - y = e^x - 1$, $y(1) = 2$;

(b) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y(1) = 1$;

(c) $y' - y\tanh x = x\cosh^2 x$, $y(0) = 2$;

COMPLÉMENTS

Exercice 6. (Extrait de l'examen de rattrapage de juin 09)

(a) Trouver une primitive de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto te^{-t}$.

(b) Trouver une primitive de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)}$.

(c) Trouver toutes les solutions de l'équation :

$$y' + \sin(x) \cdot y = \cos(x) \cdot \sin(x).$$

Exercice 7. (Extrait de l'examen de 07/08)

(a) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$\sqrt{1-x^2}\, y' - y = 0.$$

(b) Déterminer sur $]-1,1[$

$$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

(*On pourra utiliser un changement de variables.*)

(c) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$\sqrt{1-x^2}\, y' - y = e^{2\arcsin x}.$$

Exercice 8. (Extrait de l'examen de rattrapage de 07/08)

(a) Résoudre sur $]0,\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = 0.$$

(b) Déterminer sur $]0,\infty[$

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x.$$

(*On pourrait utiliser un changement de variables* .)

(c) Résoudre sur $]0,\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = e^{\frac{2}{x}}.$$

Recollement

Exercice 9. (a) Résoudre l'équation différentielle $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$.

(b) Existe t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?