Université de Rennes 1 — Année 2014-2015
UFR Mathématiques — MIEE L1, Module ANA

Chapitre 4 : Calcul intégrale

Intégrale et aire

Exercice 4.1. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-2|\, dx$.

Tableau de primitives

Exercice 4.2. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes.

(a) $(3x^2+4x-2)$ (b) $\sqrt{3x-1}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

(e) e^{2x+3} (f) 2^{-x}

Linéarisation

Exercice 4.3. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $\left(x^3-2\right)^2$; (b) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)$;

(c) $\cos^2(x)$; (d) $\sin(2x)\sin(5x)$.

Intégrales impropres

Exercice 4.4. Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent :

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}}\, dx$;

(c) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\, dx$; (d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$.

Intégration par parties

Exercice 4.5. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \cdot e^x \, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e x \cdot (\ln(x))^2 \, dx$ (c) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) \, dx$

Exercice 4.6. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $x \cdot \sinh(x)$ (b) $x^2 \cdot \cosh(3x)$ (c) $\arctan(x)$

(d) $e^x \sin(x)$

Changement de variables

Exercice 4.7. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_3^4 x(x^2-6)^{\frac{4}{3}} \, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^7(x) \, dx$ (c) $\displaystyle\int_2^3 x \cdot \exp(x^2-2) \, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$ (il s'agit d'une intégrale impropre).

Exercice 4.8. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $3x^2(x^3+4)^{20}$ (b) $\dfrac{x^2}{2x^3+5}$ (c) $x^2\cos(2x^3)$

(d) $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$ (e) $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$

Exercice 4.9. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \exp(x^3) \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cdot \cos^2(x) \, \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sqrt{\sin(x)} \, \mathrm{d}x$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 4.10. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{2x^2-11}{x^2+6x+9} \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{5x^2+4}{x^3-3x^2+3x-1} \, \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2} \, \mathrm{d}x$

Exercice 4.11. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{7}{x^2-5x-6}$ (b) $\dfrac{3}{x^2+4x+13}$ (c) $\dfrac{2x+3}{x^2+6x+11}$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Exercice 4.12. Calculer les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

(a) $\dfrac{1}{\cosh x}$ (Indication : $u = e^x$.)

(b) $\dfrac{1}{\tan(x)(\sin(x)+1)}$ (Indication : $u = \sin(x)$.)

(c) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}$ (Indication : $u = e^x$.)

Resumé des techniques d'intégration

Exercice 4.13. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \cdot \arctan(x)\ dx$ (Indication : intégration par parties.)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arccos(x)\ dx$ (Indication : intégration par parties.)

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x.$

Exercice 4.14. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{x^3+x^2+2x}{x^3+x^2-x-1}$ (b) $\cosh(2x)\cosh(3x)$ (c) $\dfrac{\ln^3 x}{x}$

(d) $\ln(x^2-1)$ (Indication : $v' = 1$.) (e) $\dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}$ (f) $\dfrac{x+1}{e^x}$ (g) $x^2\sqrt{1+x^3}$

(h) $\dfrac{1}{\sinh(x)}$

COMPLÉMENTS

Intégrale et aire

Exercice 4.15. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{2}(3x-2)\ dx\,;$ (b) $\displaystyle\int_{-4}^{3}|(|x-2|-|x+2|)|\ dx.$

Exercice 4.16. Calculer les intégrales ci-dessous, et en déduire la valeur de certaines aires.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sinh(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin(2x)\ dx$

Linéarisation

Exercice 4.17. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $\left(\sqrt{x}+x^2\right)^3\,;$ (b) $\sin(x)\cos(x)$

(c) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2.$ (d) $\sinh^2(x)$

Intégrales impropres

Exercice 4.18. Déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles l'intégrale impropre

$$\int_{1}^{+\infty}x^{\alpha}\ dx$$

est convergente.

Exercice 4.19. Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent :

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{2-3x}\ \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x$

Intégration par parties

Exercice 4.20. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $x^2\cdot\cos(x)$ (b) $x\cdot\cos^2(x)$ (c) $(x+1)\cdot e^x\cdot\ln(x)$ (d) $\ln(x)$

Exercice 4.21. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, déterminer les primitives de la fonction suivante

$$e^{ax}\cos(bx)$$

Exercice 4.22. Soit
$$I_n := \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n \, dx.$$
Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. Puis calculer $\displaystyle\int_1^e x \cdot (\ln(x))^4 \, dx$.

Exercice 4.23. Soit
$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx.$$
En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)$, démontrer que
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$
Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x) \, dx$.

Exercice 4.24. Calculer l'intégrale
$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} \, dx.$$
dans le cas où $n = 3$.

Exercice 4.25. Pour $x > 0$, on pose
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$
On admet que l'intégrale converge.

(a) Etablir que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(b) Calculer $\Gamma(4)$. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour un entier naturel n.
(c) Sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, déterminer les valeurs de $\Gamma(\frac{3}{2})$ et de $\Gamma(\frac{7}{2})$.

Changement de variables

Exercice 4.26. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes

(a) $(x^2+1)\sqrt[3]{x^3+3x-2}$

(b) $\dfrac{x^2}{4+x^6}$

(c) $2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(2x)}$

Exercice 4.27. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes

(a) $\sqrt{2-x^2}$

(b) $\sqrt{1+2x-x^2}$

(c) $\sqrt{x^2-4}$

(d) $\sqrt{x^2+4x-5}$

(e) $\sqrt{2x^2+32}$

(f) $\sqrt{2x^2-4x+4}$

Exercice 4.28. Calculer

$$\int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x \sqrt[3]{1+e^x}\ dx$$

Exercice 4.29. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}$

(b) $\dfrac{1}{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-9x^2}}$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

(f) $\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$

(g) $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(h) $\sqrt{4x^2-8x+24}$

Exercice 4.30. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)+\sin^2(x)}}$

(b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 4.31. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(a) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$ (b) $\dfrac{3x-1}{x^2+4x+4}$

Exercice 4.32. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(a) $\dfrac{x^3+2x^2-x-1}{x^2+6x+13}$ (b) $\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2+3x-5}$

(c) $\dfrac{x^3-x^2+4}{x^3+x^2+3x-5}$ (d) $\dfrac{25x}{x^4-x^2-2x+2}$

(e) $\dfrac{2x^2-3x+4}{x^4-2x^2+1}$ (f) $\dfrac{x^2+3x-2}{(x^2-4x+5)^2}$

(g) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4x+5}$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(h) $\dfrac{1}{e^x+2e^{-x}}$ (Indication : $u = e^x$.)

(i) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (Indication : $u = 1+\sqrt{x}$.)

(j) $\dfrac{\sin x \cos x}{(2+\sin x)^2}$ (Indication : $u = 2+\sin x$.)

(k) $\dfrac{1}{e^{2x}-e^x-2}$.

Exercice 4.33. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

(a) $\dfrac{1}{5+3\cos(x)}$ (b) $\dfrac{1}{\cos(x)+\sin(x)+2}$

Exercice 4.34. Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

$$(a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}\, dx \qquad (b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+3\cos(x)-\sin(x)}\, dx$$

Fonction définie par une intégrale

Exercice 4.35.

1. Soit f une fonction continue sur un intervale I, $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions dérivables et F une primitive de f. Montrer que la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx$$

est $f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)$. Indication : Utiliser $G(t) = F(b(t)) - F(a(t))$.

2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{t^2}^{t^3} e^x \; dx.$$

(a) Intégrer d'abord, puis dériver.

(b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.