Corrigé du contrôle 3 de ANA, 1 décembre 2014 (matin)

Attention, pour l'examen terminal il faut s'attendre à des calculs d'intégrales d'*au moins* ce degré de difficulté !

Barème : 4 points par question.

(1) $\int e^{-3x+2}\,dx$. On pourrait faire un changement de variables $u = -3x+2$. Or, ici il est facile de voir une primitive à l'oeil nu : $\int e^{-3x+2} = \frac{1}{-3}e^{-3x+2} + C$.

(2) $\int_0^1 (x+2)\cdot\cos(x^2+4x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+4)\cdot\cos(x^2+4x+1)\,dx$. On observe que $2x+4$ est juste la dérivée de x^2+4x+1. Avec le changement de variable $u = x^2+4x+1$ on a $dx = \frac{du}{2x+4}$ et

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (2x+4)\cdot\cos(x^2+4x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^6 \cos(u)\,du = \frac{1}{2}(\sin(6)-\sin(1))$$

(3) $\int_0^1 x\cdot e^{-2x}$. On fait une intégration par parties, avec $u' = e^{-2x}$ et $v = x$, et donc $u = \frac{-1}{2}e^{-2x}$ et $v' = 1$. On trouve

$$\int_0^1 x\cdot e^{-2x} = \left[\frac{-x}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{-e^{-2x}}{2}\,dx = \frac{-1}{2}e^{-2} + \left[\frac{e^{-2x}}{-4}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$$

(4) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$. Les racines du dénominateur sont 2 et -2. On a donc une décomposition en éléments simples:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

Par le calcul habituel on trouve $a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$, donc

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_{-1}^1 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx\right) = \frac{1}{4}\cdot\left[\ln(|x-2|) - \ln(|x+2|)\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{-\ln(3)}{2}$$

(5) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx$. On fait une décomposition en éléments simples:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1}$$

Par le calcul habituel on trouve $a = -2$ et ensuite $b = 1$, donc

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{2}{x+1} + \ln(|x+1|) + C$$