Contrôle continu no.1

Durée : 1 heure

1. On considère le polynôme
$$P(X) = X^3 - 4X^2 + (4-3i)X - 1 + 3i.$$

1. Trouver la racine réelle de P. Solution : On observe que $P(1) = 0$, donc 1 est une racine réelle
2. Effectuer la division euclidienne de P par $X-1$. Solution : On trouve $P(X) = (X-1)(X^2-3X+1-3i)$.
3. En déduire toutes les racines de P et sa factorisation dans $\mathbb{C}$. Solution : il faut trouver les racines complexes du polynôme $X^2-3X+1-3i$. Or, $X^2-3X+1-3i = (X-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+1-3i = (X-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}-3i$, et cette quantité est égale à 0 si et seulement si $X-\frac{3}{2}$ est une racine de $\frac{5}{4}+3i$. Il faut donc calculer les racines de $\frac{5}{4}+3i$. Si $(\alpha+i\beta)^2 = \frac{5}{4}+3i$, alors $\alpha^2-\beta^2 = \frac{5}{4}$, $\alpha^2+\beta^2 = \sqrt{9+\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{169}}{4} = \frac{13}{4}$, donc $2\alpha^2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$, et $\alpha = \pm\frac{3}{2}$. Comme $2\alpha\beta = 3$, on obtient $\beta = \frac{3}{2\alpha} = \pm 1$. Donc $X - \frac{3}{2} = \pm(\frac{3}{2}+i)$, et $X = -i$ ou $X = 3+i$. La factorisation est $P(X) = (X-1)(X+i)(X-3-i)$.

2.

1. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe
$$z = \frac{(3+2i)^2(1-i)}{(1+2i)}.$$
Solution : $\frac{(3+2i)^2(1-i)}{(1+2i)} = \frac{(5+12i)(1-i)(1-2i)}{5} = \frac{1}{5}(5+12i)(-1-3i) = \frac{1}{5}(31-27i)$
2. Linéariser $\sin^2 x \cos^2 x$. Solution : $\sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{-1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^2(e^{ix}-e^{-ix})^2 = \frac{-1}{16}(e^{2ix}+2+e^{-2ix})(e^{2ix}-2+e^{-ix}) = \frac{-1}{16}(e^{4ix}-2+e^{-4ix}) = \frac{1}{8}(1-\cos(4x))$
3. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $Q(X) = X^4+1$. Solution : Il faut d'abord trouver toutes les racines complexes de Q - autrement dit, il faut trouver les racines quatrièmes de -1. Les racines sont
$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{4\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \quad e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$
Maintenant $Q(X) =$
$$(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))\cdot(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))\cdot(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i))\cdot(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)) = (X^2-\sqrt{2}X+1)\cdot(X^2+\sqrt{2}X+1)$$