Université de Rennes 1 Année 2013–2014
Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

**Examen Terminal**
**Jeudi 19 Décembre 2013, 8h – 10h**

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses.

## Exercice 1

(a) Je bats très soigneusement un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que les cartes se retrouvent exactement dans l'ordre initial ? Réponse : il y a exactement 32! arrangements des cartes, donc la probabilité est $\frac{1}{32!}$

(b) Avec le même jeu de cartes, quelle est la probabilité que les trois premières cartes soient des rois ? (Formule suffit, pas de résultat numérique exigé) Réponse : Deux réponses (équivalentes) sont possibles : $\mathbb{P}$(première carte un roi)·$\mathbb{P}$(deuxième carte un roi | première carte un roi)·$\mathbb{P}$(troisième carte un roi | première et deuxième carte un roi)$= \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30}$. Autre solution : le nombre d'arrangements possibles est $A_4^3 \cdot 29! = 24 \cdot 29!$, donc $\mathbb{P} = \frac{24 \cdot 29!}{32!} = \frac{24}{30 \cdot 31 \cdot 32}$.

(c) Quelle est la probabilité que les 4 rois se trouvent parmi les 10 premières cartes ? (Formule suffit, pas de résultat numérique exigé) Réponse : $\frac{10}{32} \cdot \frac{9}{31} \cdot \frac{8}{30} \cdot \frac{7}{29}$.

(d) Si l'on dit que deux événements $A$ et $B$ sont indépendants, qu'est-ce que ça veut dire ? (Donnez la définition.) Réponse : Ça veut dire que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. (Le critère que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ est également acceptable.)

(e) Soit $\Phi$ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Si je vous informe que $\Phi(0{,}52) = 0{,}7$, savez-vous en déduire la valeur de $\Phi(-0{,}52)$ ? Solution : $\Phi(-0,52) = 1 - \Phi(0,52) = 0,3$. (La seule propriété de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ qu'on a utilisé est que la densité est une fonction paire.)

## Exercice 2

Avant de partir en vacances tu pries ton voisin de bien vouloir arroser une plante. Sans arrosage, elle mourra avec la probabilité $\frac{5}{6}$ ; avec arrosage, elle mourra avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Tu es sûr à 75% que ton voisin l'arrosera.

(1) Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à ton retour ? Rép : Événements : $V$ =vivant, $A$ =arrosé. $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(V|A) + \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(V|A^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{24}$

(2) Si elle est vivante, quelle est la probabilité que le voisin ait oublié de l'arroser ? Rép : $\frac{\mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(V|A^c)}{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(V|A) + \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(V|A^c)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{13}{24}} = \frac{1}{13}$

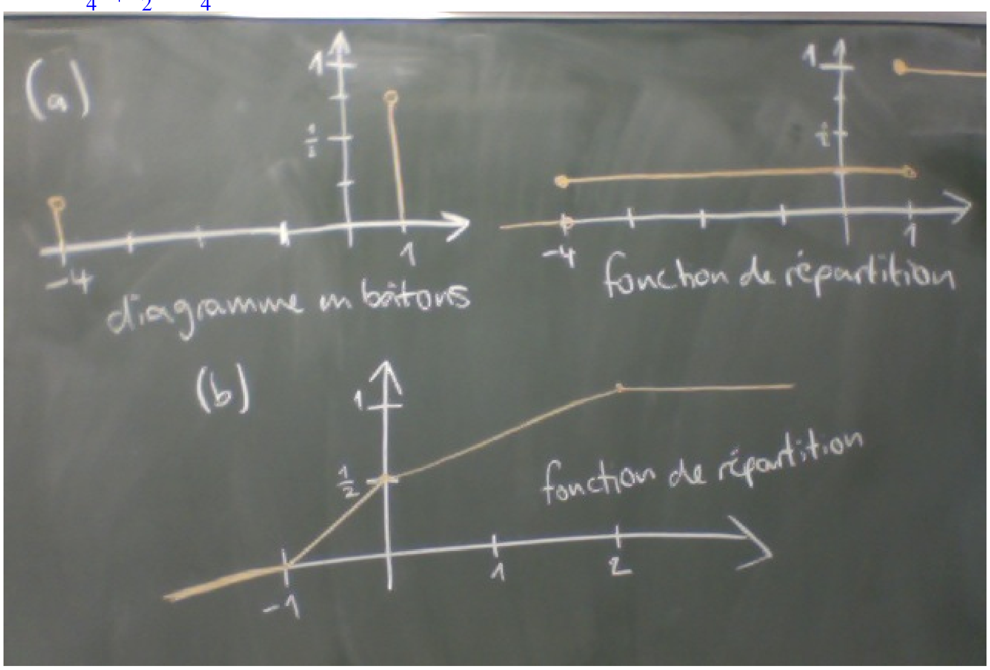
**Exercice 3**

(a) Dans un jeu vous pouvez soit gagner 1 Euro, avec une probabilité de $\frac{3}{4}$, soit gagner $-4$ Euros (c.à.d. perdre 4 Euros), avec une probabilité de $\frac{1}{4}$. Soit $X$ le gain réalisé. Dessiner le diagramme en bâtons et le graphe de la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$. Calculer l'espérance et la variance de X. Solution : Espérance $\mathbb{E}(X) = -4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$, donc le jeu n'est pas financièrement intéressant pour vous. Variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 16 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 4 + \frac{11}{16} = \frac{75}{16}$

(b) Soit $X$ la variable aléatoire continue de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1,0] \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dessiner la fonction de répartition, et calculer l'espérance. Réponse : $\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x\, dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x\, dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.




**Exercice 4** Le temps de réponse (en micro-secondes) d'un serveur informatique est distribuée selon une loi normale avec espérance $\mu = 10$ et variance $\sigma^2 = 4$. Déterminer la probabilité qu'à la prochaine requête le temps de réponse soit compris entre 10 et 14 micro-secondes. Solution : $\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 14) = \mathbb{P}(\frac{10-10}{2} \leqslant \frac{X-10}{2} \leqslant \frac{14-10}{2}) = \mathbb{P}(0 \leqslant \frac{X-10}{2} \leqslant 2) \overset{(*)}{=} \Phi(2) - \Phi(0) = 0,477$, où l'égalité $\overset{(*)}{=}$ vient du fait que $\frac{X-10}{2}$ est distribué selon la loi $\mathcal{N}(0,1)$. (Remarque : la question n'est pas tout à fait raisonnable, car un temps de réponse ne peut jamais être négatif)

**Exercice 5** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires, avec

$$\mathbb{E}(X) = 5 \quad \mathbb{E}(Y) = 4$$
$$\mathbb{V}(X) = 2 \quad \mathbb{V}(Y) = 3$$

(a) Calculer $\mathbb{E}(X^2)$. Solution : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 2 + 25 = 27$

(b) Calculer $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ et $\mathbb{V}(X + Y)$ si $X$ et $Y$ sont indépendants Solution : Dans ce cas, selon des résultats du cours, $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = 20$ et $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 5$

(c) Calculer $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ si $Cov(X, Y) = 3$. Solution : $3 = Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - 5 \cdot 4$ donc $\mathbb{E}(X \cdot Y) = 23$

**Exercice 6**

(a) Soit $X$ le nombre de filles parmi les 400 prochains bébés qui vont naître à Rennes. Quelle est la loi de $X$ ? Quelle est sa variance ? Solution : C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(400, \frac{1}{2})$, qui est de variance $\mathbb{V} = \sigma^2 = 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 100$

(b) Qu'est-ce que le théorème de Tchebychev dit sur la probabilité que $X$ soit compris entre 180 et 220 ? Solution : Cette probabilité est au moins $1 - \frac{\sigma^2}{20^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Remarque : en réalité, cette probabilité est beaucoup plus proche de 1 que ça.

(c) Qu'est-ce que le théorème de Tchebychev dit sur la probabilité que $X$ soit compris entre 195 et 205 ? Solution : Cette probabilité est au moins $1 - \frac{\sigma^2}{5^2} = 1 - 4 = -3$. Toute probabilité est par définition entre 0 et 1, donc le théorème de Tchebychev n'apporte aucune information dans ce cas.

* * *

**Formules** que vous pouvez utiliser sans justification :

— Si $X \sim \mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
— Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$
— Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
— Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$
— Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
— Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Quelques valeurs de la fonction Phi (fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0,5 | 0,841 | 0,977 | 0,999 |