Université de Rennes 1 — Année 2013–2014

Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Examen de rattrapage
18 juin 2014, 8h – 10h

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1 Pas de justifications exigées pour cet exercice.

(a) Soient A et B deux événements, et supposons que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Donner la définition de *la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé*. Réponse : $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

(b) Soit S un ensemble avec 6 éléments. Combien de sous-ensembles y a-t-il ? En combien de ces sous-ensembles contiennent au moins 2 éléments ? Réponse : $2^6 = 64$ sous-ensembles. Il y en a 1 vide et 6 avec un seul élément, donc il y en a $64 - 7 = 57$ qui contiennent au moins deux éléments

(c) Il y a 6 écoles spécialisées dans un certain domaine scientifique, et vous devez écrire une liste de préférence : vos 3 écoles préférées, classées dans l'ordre de préférence. Combien de listes possibles y a-t-il ? Ensuite, si parmi les 6 écoles, il y a 4 privées et 2 publiques, combien de listes contiennent exactement une école publique ?Réponse : $6\cdot 5\cdot 4 = 120$ et $3\cdot 2\cdot 4\cdot 3 = 72$

(d) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme (continue) sur l'intervalle $[0,4]$. Alors $\mathbb{P}(X \in [1,2]) =$? et $\mathbb{P}(X \in [2,5]) =$? Réponse : $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$

(e) Soit $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire avec $\mathbb{E}(X) = 3$ et $\mathbb{V}(X) = 2$. Quelle est l'espérance et la variance de la variable aléatoire $4X - 1$? $\mathbb{E}(X) = 4\cdot 3 - 1 = 11$, $\mathbb{V}(X) = 4^2\cdot 2 = 32$

(f) Soient X et Y des variables aléatoires tels que $\mathbb{E}(X) = 5, \mathbb{E}(Y) = 4$ et $Cov(X,Y) = 3$. Déterminez $E(X\cdot Y)$. Réponse : $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$ donc $3 = \mathbb{E}(X\cdot Y) - 4\cdot 5$, donc $E(X\cdot Y) = 23$

(g) Une loterie nationale a un tirage par semaine, et toutes les semaines il y a le même, très grand, nombre de joueurs. En moyenne, il y a 1 grand gagnant, c.à.d. un joueur qui a tous les nombres corrects (mais bien sûr, parfois il y en a aucun, et parfois plusieurs). Soit X le nombre de grands gagnants la semaine prochaine. Cette variable aléatoire suit quelle loi ? (Donnez le nom et les paramètres de la loi.) Solution : Poisson $\mathcal{P}(1)$. Évidemment ce n'est pas exactement vrai : en réalité la loi de Poisson n'est qu'une approximation, qui est *vraiment* valable quand le nombre de joueurs tend vers $+\infty$.

(h) Si une variable aléatoire X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{3})$, déterminez $\mathbb{P}(X = 3)$. $\mathbb{P}(X = 3) = (\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

(i) Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$, déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$. $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-1}\cdot\frac{1^0}{0!} = \frac{1}{e}$ ($\simeq 36,8\%$)

(j) Supposons que X est une variable aléatoire avec $\mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X=4)=\frac{1}{3}$. Dessiner le graphe de la fonction de répartition de X.

(k) Pour estimer la proportion d'individus dans une population qui est de groupe sanguin A, je prends un échantillon de 50 individus au hasard, et je teste la proportion d'individus de type A dans cet échantillon. Cela me donne une *estimation* raisonnable. Si maintenant je veux diviser par 10 l'erreur d'estimation attendu, je dois choisir un échantillon plus grand – quelle taille d'échantillon est nécessaire ? Réponse : On a vu dans le TCL que l'erreur attendu d'une telle estimation se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$, donc pour diviser l'erreur attendu par 10 il faut multiplier la taille n de l'échantillon par $10^2=100$: il me faut 5000 individus.

Exercice 2 On considère une pièce d'argent juste (non-pipée) dont les deux côtés sont marqués "0" et "1". On jette cette pièce deux fois – on a donc un univers $\Omega=\{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$, dont chaque élément apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$. Considérons les deux variables aléatoires

$$X((i,j))=\min(i,j)\quad\text{et}\quad Y(i,j)=|i-j|$$

(a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. $\mathbb{E}(X)=0\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ et $\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

(b) Calculer la covariance $Cov(X,Y)$. $=\mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)\overset{*}{=}0-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}$ où l'égalité $\overset{*}{=}$ vient du fait que pour tout couple (i,j) on a $X(i,j)=0$ ou $Y(i,j)=0$.

(c) Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles positivement corrélées, négativement corrélées, ou non corrélées ? Sont elles dépendantes ou indépendantes ? Réponse : Dépendantes, car négativement corrélées ($Cov(X,Y)<0$).

Exercice 3 Considérons une variable aléatoire X dont la loi est continue, de densité

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

(a) Calculer l'espérance et la variance de X. Réponse : $\mathbb{E}(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=[\frac{2}{3}x^3]_{x=0}^{x=1}=\frac{2}{3}$ et $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$

(b) Calculer la fonction de répartition et la médiane X. Réponse : La fonction de répartition $F_X(t)=\int_0^t 2x\,dx=t^2$. La médiane m satisfait $F_X(m)=\frac{1}{2}$, donc $m=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0,7071$.

Exercice 4 Dans un magasin, un certain article est vendu en moyenne en 30 exemplaires par mois - formellement, le nombre d'article vendu par mois est une variable aléatoire X avec $\mathbb{E}(X)=30$.

(a) Qu'est-ce que le théorème de Markov dit sur la probabilité que l'on vende plus de 90 articles ou plus le prochain mois. Réponse : on doit d'abord observer que X ne prend que des valeurs positives (pas de nombre d'articles vendus négatif !). On peut donc appliquer l'inégalité de Markov : $P(X\geqslant 90)\leqslant\frac{\mathbb{E}(X)}{90}=\frac{1}{3}$.

(b) Si l'on sait en plus que l'écart-type $\sigma(X)$ est de 3 articles, que pouvez vous dire sur la probabilité que le nombre d'articles vendus soit compris entre 25 et 35 ? Réponse : $\mathbb{P}(|X-30| \leqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(|X-30| \geqslant 6) \overset{Tchebychev}{\geqslant} 1 - \frac{\sigma(X)^2}{6^2} = 1 - \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Donc la probabilité en question est au moins $\frac{1}{4}$.