Exercices pour le cours PS1

1. Ensembles et dénombrements

Exercice 1.1. Dans l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, on considère les trois sous-ensembles

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{1,3,5\}, \quad C = \{3,4,5,6\}$$

Déterminer les sous-ensembles suivants

- $A \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap C$
- $(A \cup B)^c$
- $A \backslash B$
- $A \cap B \cap C$
- $A \Delta B$

Exercice 1.2. Trouver un exemple d'ensembles A, B, C tels que $(A\backslash B)\backslash C \neq A\backslash(B\backslash C)$

Exercice 1.3. Soit Ω un ensemble, et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble. Supposons $card(A) = p$, et $card(\Omega) = n$.

(a) Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω ?

(b) Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω contenant A ?

(c) Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω disjoints de A ?

Exercice 1.4. On veut placer n convives autour d'une table circulaire avec n chaises. Combien y a-t-il de dispositions possibles, sachant que deux dispositions sont identiques si chaque convive a les mêmes voisins.

Exercice 1.5. Combien de séries de résultats possibles (tenant compte de l'ordre) y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois ? Et combien de séries contenant au moins un 6 ?

Exercice 1.6. Un jeu de cartes contient 32 cartes (16 noires et 16 rouges). On tire trois fois (sans remise). Combien de séries de résultats y a-t-il ? Et combien d'entre eux contiennent exactement une carte rouge ?

Exercice 1.7. (Coefficients binomiaux)

(a) Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $C_n^k = C_n^{n-k}$

(b) Si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$

(c) Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (formule du binôme de Newton)

(d) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

(e) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$. (Par exemple : $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 0$)

Exercice 1.8. Il y a 4 types de gâteaux dans une patisserie. De combien de façons peut-on acheter 7 gâteaux ?

2. Espaces probabilisés

Exercice 2.1. De combien de manières peut-on mettre 8 personnes autour d'une table ronde avec 8 places

(a) si aucune restriction est mise.

(b) s'il y a une famille de 3 qui doit être assis ensemble.

(c) Si on place les 8 invités aléatoirement, quelle est la probabilité que la famille est assise ensemble par pure chance ?

Exercice 2.2. On considère un jeu avec 32 cartes.

(a) Combien y a-t-il de donnes de 4 cartes ?

(b) Combien y a-t-il de donnes de 4 cartes contenant exactement deux rois ?

(c) Quelle est la probabilité qu'une donne de 4 cartes contienne exactement deux rois ?

Exercice 2.3. Une urne contient 2 boules rouges et 5 noires. Les joueurs A et B tirent à tour de rôle une boule, sans remise, jusqu'à ce que une boule rouge sorte (A commence). Quelle est la probabilité que ce soit A qui tire la première boule rouge ?

Exercice 2.4. Dans une lotérie, le joueur doit choisir 8 nombres entre 1 et 40. Le tirage sélectionne 8 nombres parmi les 40. En admettant que le tirage est équiprobable pour les C_{40}^{8} combinaisons, quelle est la probabilité que le joueur ait

(a) les 8 bons nombres ?

(b) 7 parmi les 8 bons nombres ?

(c) aucun bon nombre ?

3. Probabilité conditionnelle et indépendance

Exercice 3.1. (Démonstration que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers Ω, et soit $B \subset \Omega$ un événement avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Montrer que la fonction qui à l'événement A associe le nombre $\mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur Ω.

Exercice 3.2. Pour une famille avec exactement deux enfants, calculer les probabilités suivantes.

(a) Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ?

(b) Sachant que l'ainée est une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ?

Exercice 3.3. (Indépendance multiple) Commençons avec une définition : trois événements A, B, C sont dits *deux à deux indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \text{ et } \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Ils sont dits *mutuellement indépendants* si

$$\text{ils sont deux à deux indépendants et en plus } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Soit, par exemple $\Omega = \{\text{familles avec deux enfants}\}$. Considérons les trois événements $A =$"la fratrie est mixte", $B =$"l'enfant ainé est une fille", $C =$"le cadet est un garçon".

(a) Montrer que ces trois événements sont deux à deux indépendants.

(b) Montrer que ces trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 3.4. Dans une population on trouve une proportion de $\frac{1}{10000}$ individus qui portent un certain virus. Il y a un test pour la présence de ce virus. Ce test n'est pas parfait : si un individu porte le virus, alors le test le détecte avec une probabilité de 0,99. Si un individu ne porte pas le virus, le test donne un résultat positif (érroné) avec probabilité de 0,001.

(a) Si on tire un individu au hasard de la population, on lui fait passer le test, et le résultat est positif, quelle est la probabilité qu'il porte vraiment le virus ?

(b) À première vue, le résultat obtenu en (a) est extêmement surprenant ! Expliquez-le en quelques phrases françaises.

Exercice 3.5. A quelle condition deux événements incompatibles sont-ils indépendants?

Exercice 3.6. On considère trois cartes: une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche?

Exercice 3.7. Avant de partir en vacances tu pries ton voisin de bien vouloir arroser une plante. Sans arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,8$; avec arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,15$. Tu es sûr à 90 % que ton voisin l'arrosera.

(1) Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à ton retour?
(2) Si elle est morte, quelle est la probabilité que le voisin ait oublié de l'arroser?

Exercice 3.8. Soit n un entier positif. On considère n individus $I_1, I_2, \ldots, I_n$; ces individus mentent avec probabilité $p\,(0 < p < 1)$, et leurs comportements sont indépendants. Une information (sous forme de oui ou non) est donnée à I_1 qui la transmet à I_2, ... qui la transmet à I_n, qui l'annonce au monde. Quelle est la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise, c.à.d. que l'annonce de I_n coincide avec l'information donnée à I_1 ? Montrer que $\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2}$. (Indication : se souvenir des solutions des exercices 1.7(d) et (e).)

Exercice 3.9. (Le jeu des trois portes) Le jeu des trois portes était un jeu télévisé populaire (Let's make a deal) diffusé dans les années 1970 aux États-Unis. Le joueur est placé devant 3 portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture que le joueur peut gagner. Derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le présentateur connait la position de la voiture. Le joueur doit d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui est ni celle choisie par le candidat, ni celle qui cache la voiture. Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte initialement choisie, ou bien de changer son choix vers la troisième porte.

(a) Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il garde son choix initial ?

(b) Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il choisit la troisième porte ?

Exercice 3.10. (Difficile) Dans une voiture de TGV toutes les places sont vendues. La première personne qui arrive est un peu tête-en-l'air, et se met aléatoirement à une place (mais dans la bonne voiture). Chaque personne suivante qui arrive applique la règle suivante : si sa place est encore libre, elle se met sur sa place prévue, si sa place est déjà prise, elle se met aléatoirement sur une des places encore libres. Quelle est la probabilité que la dernière personne qui arrive pourra se mettre sur sa place prévue ? (Indication : cette question peut se faire sans aucun calcul et sans mentionner les probabilités conditionnelles. Or, pour avoir une idée, vous pouvez calculer les cas où une voiture de TGV n'a que 2, 3, ou 4 sièges.)

4. Variables aléatoires discrètes

Exercice 4.1. La fonction de répartition d'une v.a. Y est la suivante:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.5 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0.6 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 0.8 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0.9 & \text{si } 3 \leqslant x < 3.5 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3,5 \end{cases}$$

Calculer la loi de probabilité de Y.

Exercice 4.2. On lance deux dés honnêtes. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 4.3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p – donc $\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ Démontrer que X est une "variable aléatoire sans mémoire" :

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > K + k \mid X > K)$$

Indication : montrer d'abord que $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$.

Exercice 4.4. Admettons que le nombre d'erreurs par page dans un livre suive la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}5$. Calculer la probabilité que, sur une page donnée, il y a au moins 3 erreurs.

Exercice 4.5. Soit X une variable aléatoire de Poisson avec paramètre λ. Pour une valeur $k \in \mathbb{N}$ donnée, quelle est la valeur de λ qui maximise $\mathbb{P}(X = k)$?

5. Espérance et variance

Exercice 5.1. On lance deux dés honnêtes. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5.2. On lance une pièce de monnaie un certain nombre de fois jusqu'à obtenir "pile". On s'arrête la première fois où on obtient "pile". On touche alors une somme d'argent égale à 2 puissance le nombre de fois où on a obtenu "face". On note X cette somme. Quelle est l'espérance de X?

Exercice 5.3. Soit X une variable aléatoire discrète. Que peut-on dire si la variance de X est 0 ?

Exercice 5.4. Une pièce de monnaie porte sur une face l'inscription "17" et de l'autre face "20". (Ceci peut être modélisé par une variable aléatoire X de loi $\mathbb{P}(X = 17) = 0,5$ et $\mathbb{P}(X = 20) = 0,5$.) Trouver l'espérence et la variance. Indication : comparer avec la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$

Exercice 5.5. Soit X une variable aléatoire. On appelle variable aleatoire centrée réduite associée à X, la variable aléatoire X^* définie par:

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Trouver $\mathbb{E}(X^*)$ et $\mathbb{V}(X^*)$.

Exercice 5.6. Soir X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 5$. Calculer $\mathbb{E}((2+X)^2)$ et $\mathbb{V}(4+3X)$.

Exercice 5.7. On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes avec remise. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi de X, son espérance, sa variance, et son écart-type.

Exercice 5.8. Toujours avec un jeu de 32 cartes, on effectue une série infinie de tirages successifs, en remettant chaque fois la carte tirée.

(a) Soit Y, le rang d'apparition du premier roi. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

(b) Soit Z, le nombre de cartes autres qu'un roi qu'il aura fallu tirer pour obtenir le premier loi. Donner, sans calcul, la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 5.9. Pour une variable aléatoire X binomiale d'espérance 6 et de variance 2,4 trouver $\mathbb{P}(X = 5)$.

Exercice 5.10. Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le plus petit. On note X le nombre de tirages ainsi effectués. Déterminer la loi de X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $F_X(x)$.

Exercice 5.11. Une urne contient 2^n papiers sur lesquels sont reproduits les 2^n parties d'un ensemble E à n éléments. On tire un papier au hasard. Soit X, la variable aléatoire égale au cardinal de la partie tirée. Déterminer la loi de X, et donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5.12. On joue au pile ou face avec une pièce avec $\mathbb{P}(\text{pile}) = p$, et $\mathbb{P}(\text{face}) = 1 - p$. On effectue des lancers successifs. Soit X, la variable aléatoire égale au rang de la 2^{eme} apparition de pile. Trouver la loi de X. Trouver l'espérance (difficile) et la variance (encore plus difficile) de X.

6. Variables aléatoires continues

Exercice 6.1. Le nombre de minutes qu'un joueur de base-ball particulier se trouve sur le terrain suit la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ 0,025 & \text{si } 10 \leqslant x < 20 \\ 0,05 & \text{si } 20 \leqslant x < 30 \\ 0,025 & \text{si } 30 \leqslant x < 40 \\ 0 & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

Trouver la probabilité que ce joueur soit actif :

(a) plus de 15 minutes.

(b) entre 20 et 35 minutes.

(c) moins de 30 minutes.

Exercice 6.2. Une variable aléatoire X a une densité

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver c, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, et la médiane.

Exercice 6.3. Un nombre est choisi au hasard, selon la loi uniforme, sur le segment $[0,1]$. Trouver la probabilité que le rapport entre le plus petit et le plus grand segment soit inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 6.4. Soit N un entier. On choisit indépendamment N nombres réels sur l'intervalle $[0,N]$ selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0,N)$. On note X_N le plus petit des nombres obtenus. On va étudier la variable aléatoire X_N :

(a) Pour tout $t \in [0,N]$, calculer $\mathbb{P}(X_N > t)$.

(b) En déduire la fonction de répartition F_{X_N} de X_N.

(c) Pour $t > 0$ fixé, calculer $\lim_{N\to\infty} F_{X_N}(t)$. Indication : vous pouvez admettre la formule (normalement vue en Lycée) : $\lim_{N\to\infty}(1+\frac{x}{N})^N = e^x$.

(d) Donner un sens exact à la phrase “Pour N très grand, X_N est distribué selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$”.

Exercice 6.5. La durée de vie (en minutes) d'une particule élémentaire radioactive peut être modélisée par une variable aléatoire exponentielle, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}e^{-x/100} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Quelle est la médiane de la durée de vie ?

(b) Quelle est la demi-vie ?

Exercice 6.6. (a) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Rappellons que nous notons $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de répartition de cette loi. Sachant que $\Phi(-1) = 0,15866\ldots$, $\Phi(0) = 0,5$ et $\Phi(1) = 0,84134$, déterminer la probabilité

$$\mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma])$$

(b) Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ arbitraires. Déterminer la probabilité

$$\mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma])$$

Exercice 6.7. Supposons que vous avez à votre disposition un générateur de nombres aléatoires, qui engendre des nombres réels selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Vous souhaitez engendrer des nombres aléatoires, mais pas selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ mais selon une certaine loi dont vous connaissez la fonction de répartition $F(t)$. Supposons que cette fonction est continue et strictement croissante, de sorte qu'il y a une fonction inverse G – ça veut dire que

$$F(t) = u \quad \Leftrightarrow \quad t = G(u)$$

ou encore $F(G(u)) = u$ pour tout u.

(a) Choisissons Y avec notre générateur, selon la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $\mathbb{P}(G(Y) \leqslant t) = F(t)$.

(b) Donc en pratique, que doit-on faire pour engendrer une v.a. dont la fonction de répartition est F ?

(c) Par exemple, expliquez comment engendrer des nombres aléatoires selon une loi expenentielle $\mathcal{E}(1)$ si l'on n'a qu'un générateur de loi $\mathcal{U}(0,1)$.

Exercice 6.8. (a) Un poste à incendie doit être installé lelong une route forestière de longueur A ($A \in \mathbb{R}$). Si les incendies se déclarent en des points uniformément réparties sur $[0,A]$, où doit-on placer ce poste de façon à minimiser l'espérance entre le poste et l'incendie ?

(b) (difficile) Supposons que la route soit infiniment longue, s'étendant de 0 à l'infini $+\infty$. Si la distance entre un incendie et l'origine est exponentiellement distribué selon une loi $\mathcal{E}(1)$, où doit-on installer le poste à incendie ?

Exercice 6.9. Soit X une variable aléatoire qui est distribué selon la loi exponentielle de paramètre 1, c.à.d., $X \sim \mathcal{E}(1)$. Montrer que X est “sans mémoire", au sens suivant : si $K > 0$ et $k > 0$ alors

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > K + k \mid X > K)$$

7. Indépendance de variales aléatoires

Exercice 7.1. Les deux côtés une pièce sont marqués “0” et “1”. On jette cette pièce deux fois – on a donc un univers $\Omega = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$, dont chaque élément apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$. Considérons les deux variables aléatoires

$$M((i,j)) = \min(i,j) \quad \text{et} \quad S((i,j) = i + j$$

Quelle est leur covariance ?

Exercice 7.2. Soient X et Y, deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p, $0 < p < 1$, indépendantes. On définit les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

(a) Les variables S et D, sont-elles indépendantes?

(b) Calculer $Cov(S,D)$.

Exercice 7.3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Trouver la loi de $X + Y$ si

(a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ (lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2). Indication : la réponse est que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

(b) $X \sim \mathcal{B}(n_1,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2,p)$. Indications : la réponse est que $X + Y$ suit également une loi binomiale : $X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. Vous avez le droit d'admettre la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k \cdot C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$$

Exercice 7.4. On jette deux dés. Soient X et Y respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs obtenues.

(a) Calculer la loi de probabilité conditionnelle de Y, sachant que $(X = i)$, pour $i = 1,2,\ldots,6$.

(b) X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 7.5. Soient $X\colon \Omega \to \{0,2,4\}$ et $Y\colon \Omega \to \{0,1,2,3\}$ deux variables aléatoires. Nous supposons que les probabilités $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ sont comme indiqués dans le tableau suivant.

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	$2/48$	$6/48$	$3/48$	$1/48$
2	$4/48$	$12/48$	$6/48$	$2/48$
4	$2/48$	$6/48$	$3/48$	$1/48$

(a) Déterminer la loi de X. Déterminer la loi de Y.

(b) Les variables aléatoires X et Y, sont-elles indépendantes?

8. Loi des grands nombres et théorème central limite

Exercice 8.1. On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

(a) Trouver une borne supérieure sur la probabilité que la production de la semaine prochaine soit d'au moins 75 pièces.

(b)* Y a-t-il une borne sur la probabilité que la production soit inférieure à 30 pièces ?

(c) On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine soit strictement comprise entre 40 et 60 pièces?

Exercice 8.2. On considère une variable aléatoire continue X obéissant a la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 10]$.

(a) Calculez son espérance et sa variance.

(b) Majorez la quantité $\mathbb{P}(|X - 5| \geqslant 5)$ grace à l'inégalité de Tchebychev. Que vaut en fait cette probabilité?

Exercice 8.3. Si $\mathbb{E}(X) = 75$, $\mathbb{E}(Y) = 75$, $\mathbb{V}(X) = 10$, $\mathbb{V}(Y) = 12$ et $Cov(X, Y) = -3$, chercher des bornes supérieures à

(a) $\mathbb{P}(|X - Y| \geqslant 15)$

(b)* $\mathbb{P}(X \geqslant Y + 15)$

(c)* $\mathbb{P}(Y \geqslant X + 15)$

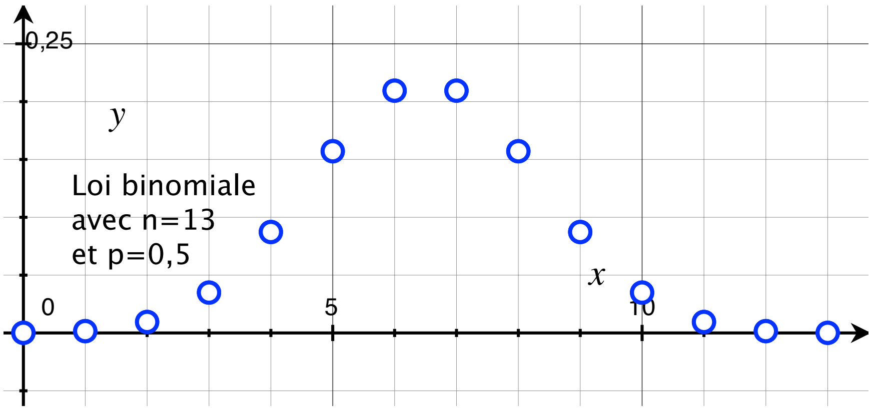
Exercice 8.4. On lance cent fois une pièce de monnaie équilibrée.

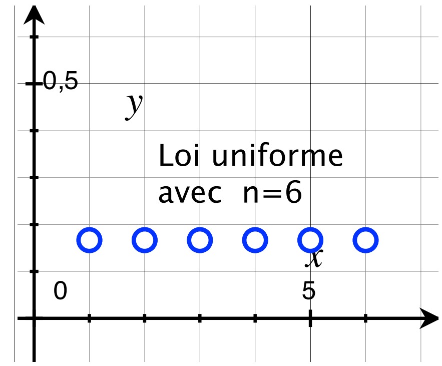
(a) Majorez, à l'aide de l'inégalité de Tchebychev, la probabilité d'avoir plus de 70 fois Face ou moins de 30 fois Face à l'issue de ces tirages.

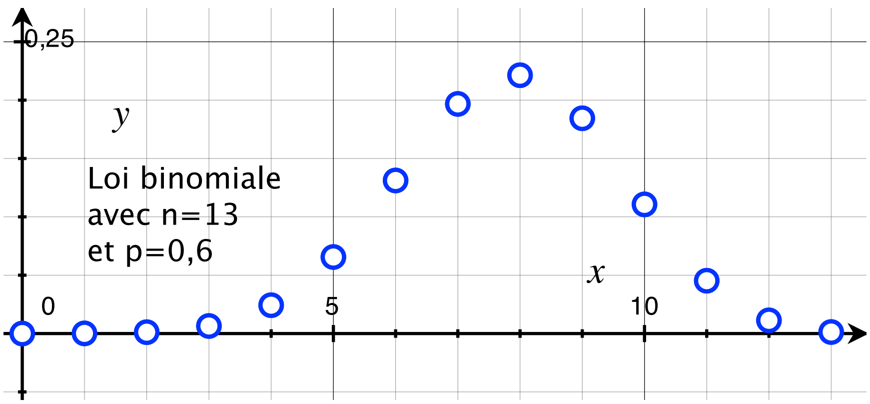
(b) À l'aide du théorème central limite, estimez la même probabilité.

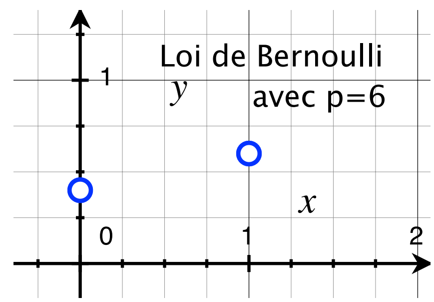
TABLE 1. **Lois discrètes classiques**

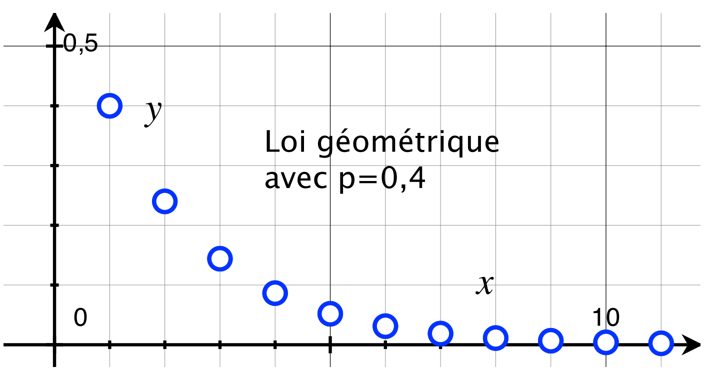
Dénomination	**Loi**	**Espérance**	**Variance**
Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$X(\Omega) = \{0,1\}$ $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ $\mathbb{P}(X=1) = p$	$\mathbb{E}(X) = p$	$\mathbb{V}(X) = p(1-p)$
Loi Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$	$\mathbb{V}(X) = np(1-p)$
Loi Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = [\![1,+\infty[\![$ $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = [\![0,+\infty[\![$ $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$\mathbb{V}(X) = \lambda$


0,25
y
Loi binomiale
avec n=13
et p=0,5
x
0
5
10


0,5
y
Loi uniforme
avec n=6
x
0
5


0,25
y
Loi binomiale
avec n=13
et p=0,6
x
0
5
10


Loi de Bernoulli
1
y
avec p=6
x
0
1
2


0,5
y
Loi géométrique
avec p=0,4
x
0
10

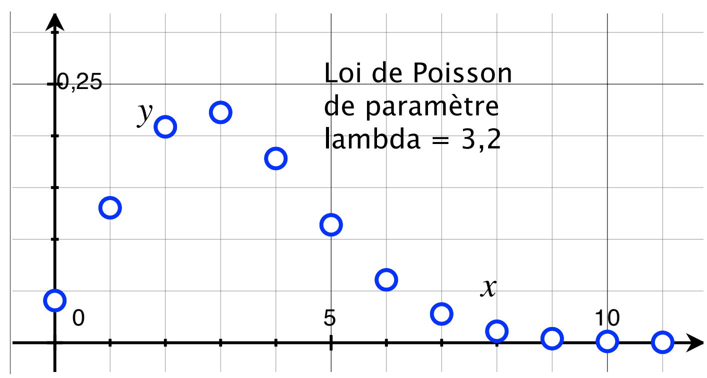
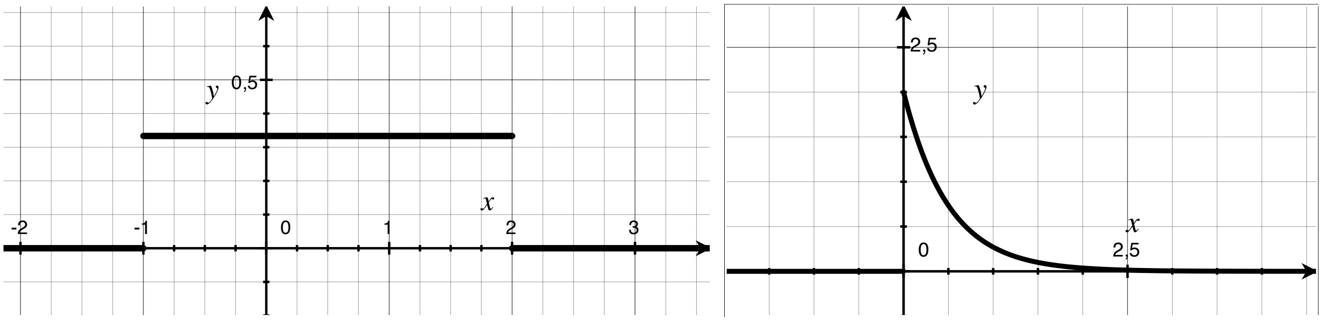
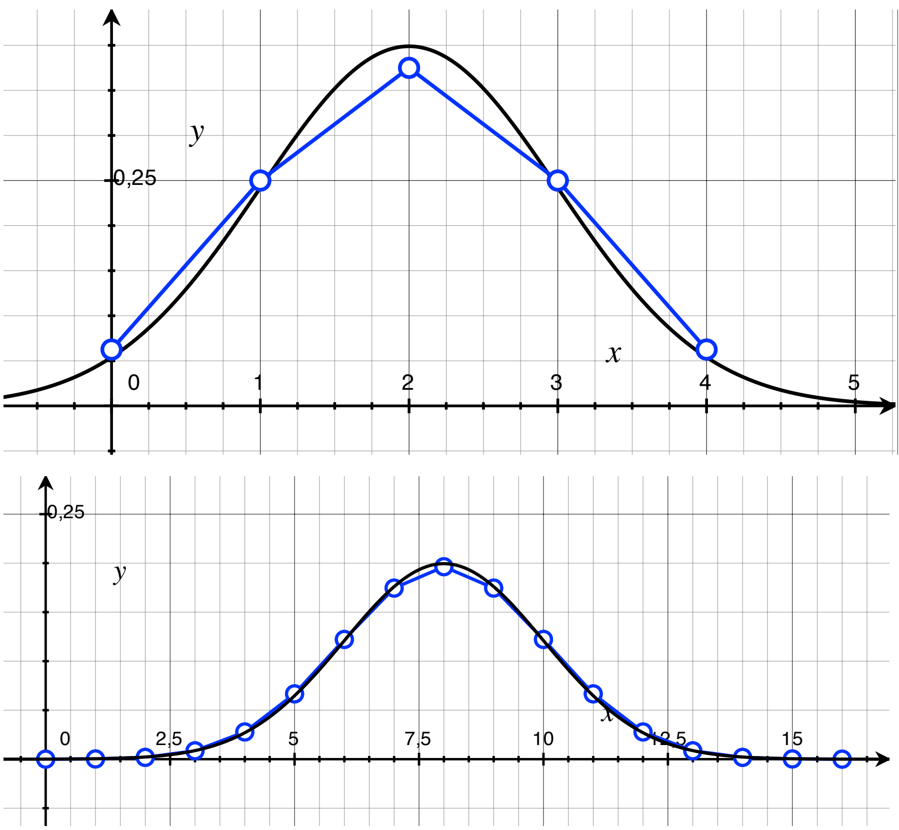

Loi de Poisson
de paramètre
lambda = 3,2
0,25
y
x
0
5
10

TABLE 2. **Lois discrètes classiques**

Dénomination	**Densité**	**Espérance**	**Variance**
Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b]$ $f(x) = 0, \quad x \notin [a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$ $f(x) = 0, \quad x < 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi Normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Loi Log-Normale Paramètres μ, σ	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$
Loi χ^2 (Chi-deux) Paramètre $k \in \mathbb{N}$	$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \ x \geqslant 0$ où Γ est la “fonction Gamma” $f(x) = 0, \quad x < 0$	k	$2k$
Loi Logistique Paramètres μ, s	$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)/s}}{s\left(1+e^{-(x-\mu)/s}\right)^2}$	μ	$\frac{\pi^2}{3} s^2$



(a) Loi uniforme $\mathcal{U}(-1,2)$. Sa densité est de $\frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[-1,2]$ et de 0 en-dehors de cet intervalle. (b) Densité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$



Comparaison de la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$ avec la loi normale de la même espérance et la même variance, pour $n=4$ et $n=16$