Bert Wiest
Université de Rennes 1
UFR Mathématiques et IRMAR

Cours PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Organisation Il y a 15h de cours, dont 2h pour les contrôles continus. Détails sur ma page `http://perso.univ-rennes1.fr/bertold.wiest`

Littérature Regardez dans la BU, rayon 519.2 ! Je recommande par exemple :

- Alain Combrouze, Probabilités et statistiques, Presses universitaires de France (un énorme pavé avec des explications détaillées)
- Sheldon M. Ross, Initiation aux probabilités, Presses polytechniques et universitaires romandes (Ce livre contient énormément d'exercices intéressants.)
- G.Biau, J.Droniou, M.Herzlich, Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature, EDP Sciences. (Ce très joli livre est pluttôt écrit pour des biologues, et il est agréable à lire.)
- D.Fredon, Statistique et probabilités
- Corina Reischer, Raymond Leblanc, Bruno Rémillard, Denis Laroque, Théorie des probabilités – Problèmes et solutions, Presses de l'Université du Québec
- Sylvie Méléard, Aléatoire, Les éditions de l'école polytechnique (sur un niveau assez élevé)

Prérequis Je vais utiliser sans explication

- théorie des ensembles très élémentaire : réunion $A \cup B$, intersection, A et B sont "disjoints" si $A \cap B = \emptyset, A \subset B$ sous-ensemble
- un peu de différentiation et intégration de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - dérivée de polynômes, fonction exponentielle, dérivée de composée de fonctions.
  - primitive de polynômes, fonction exponentielle, intégration par parties
- suites
  - définition de "convergence" d'une suite vers un nombre
  - $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)}$ pour $x \in]-1, 1[$ (si vous ne connaissiez pas cette formule, il suffira de l'admettre)
- fonction exponentielle $e^x = \exp(x)$:
  - $\exp(0) = 1$, $\exp'(x) = \exp(x)$, et caractérisé par ça.
  - $e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ (si vous ne connaissiez pas cette formule, il suffira de l'admettre)
  - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ (si vous ne connaissiez pas cette formule, il suffira de l'admettre)

CONTENTS

1. Ensembles et dénombrements

Notation 1.1. (Modélisation d'une expérience aléatoire)
Pour une expérience (ou "épreuve") aléatoire donnée, nous noterons Ω l'ensemble (nous dirons l'"Univers") de tous les résultats possibles de l'expérience. Un "événément" est par définition un sous-ensemble de Ω.

Exemple 1.2. Je tire une carte (choisie au hasard) d'un jeu avec 32 cartes. Alors $\Omega = \{$7 de pique, 8 de pique, ... , as trèfle$\}$ (32 éléments). L'événement "10 d'une quelconque couleur" a quatre éléments : $A = \{$10 pique, 10 coeur, 10 carreau, 10 trèfle$\}$. Remarquez : $A \subset \Omega$.

Exemple 1.3. Je jette deux fois de suite un dé. Alors

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),......,(6,5),(6,6)\}\\ &= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}\end{aligned}$$

a $6 \cdot 6 = 36$ éléments. L'événement "deux fois le même nombre"$= \{(1,1),...,(6,6)\}$ a 6 éléments.

Remarque 1.4. C'étaient des exemples particulièrement agréables car tous les éléments de Ω arrivent avec la même probabilité. [Donc, pour calculer la probabilité de "deux fois le même nombre", il suffit de calculer $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. On va y revenir.]

Notation 1.5. $\forall =$ pour tout (quelque soit), $\exists =$ il existe

Notation 1.6. Pour un ensemble Ω, on note

- $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de parties (l'ensemble des sous-ensembles) de Ω. C.à.d., chaque élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un sous ensemble de Ω. (Par exemple, si $\Omega = \{A,B,C\}$, alors
$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}, \{A,B,C\}\})$$
Remarque : si Ω a n éléments, alors $\mathcal{P}(\Omega)$ a 2^n éléments.
- Complémentaire : si $A \subset \Omega$, on note $A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$ le complémentaire. [Dessin]
- Différence : si $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, alors $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$. [Dessin]
- La différence symétrique : si $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, alors on note
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
la différence symétrique. [Dessin]

Proposition 1.7. *(Propriétés de ces opérations)*

(1) $A \cup B = B \cup A$
(2) $A \cap B = B \cap A$

(3) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ *donc on peut écrire* $A\cup B\cup C$
(4) *même chose pour* $\cap$
(5) $(A^c)^c = A$ **[***Dessin***]**
(6) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$ **[***Dessin***]**
(7) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

Démonstration admis (mais plus ou moins évident...)

Exercice 1.8. Donner un exemple qui montre qu'en général, $(A\setminus B)\setminus C \neq A\setminus(B\setminus C)$

Définition 1.9. (produit cartésien) Si A et B sont deux ensembles, alors $A\times B$ est l'ensemble des couples ordonnés :

$$A\times B = \{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$$

Exemple 1.10. Si je jette un dé *et* joue au pile ou face, alors j'aurai l'univers

$$\Omega = \{1,...,6\}\times\{P,F\}$$

avec $6\cdot 2 = 12$ éléments : $(1,P)$, $(2,P)$,..., $(6,P)$, $(1,F)$,...,$(6,F)$.

Définition 1.11. Soit Ω un ensemble. Si Ω n'a qu'un nombre fini d'éléments, alors ce nombre est appelé le *cardinal* de Ω, et noté $card(\Omega)$.

Proposition 1.12. (1) $card(\emptyset) = 0$
(2) *Si* $A\subset B$ *alors* $card(A)\leqslant card(B)$
(3) *si* $A\subset\Omega$, *alors* $card(A^c) = card(\Omega) - card(A)$
(4) *si* $A,B\subset\Omega$ *sont disjoints (*$A\cap B=\emptyset$*), alors* $card(A\cup B) = card(A)+card(B)$
(5) *en général,* $card(A\cup B) = card(A)+card(B)-card(A\cap B)$ *- DESSIN*
(6) $card(A\setminus B) = card(A) - card(A\cap B)$
(7) *Si A et B sont deux ensembles finis, alors* $card(A\times B) = card(A)\cdot card(B)$

Démonstration admis **[**juste dire quelque mots sur (5)**]**

Exemple 1.13. parmi 30 étudiants (E), 20 parlent Anglais (A), 15 parlent Chinois (C), et 10 les Deux (D). Combien parlent ni anglais ni chinois ?

Rép : DESSIN. On cherche

$$\begin{aligned} card((A\cup C)^c) &= card(E) - card(A\cup C) \\ &= 30 - (card(A)+card(C)-card(D)) \\ &= 30-(20+15-10) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Quatre exemples fondamentaux de cardinaux

Rappel 1.14. Soit Ω un ensemble avec n éléments. Combien de permutations des éléments de Ω y a-t-il, c.à.d. combien de listes (ordonnées) qui contiennent tous les éléments de Ω (sans répétition) ? Réponse : $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ ("n factoriel").

Théorème 1.15. *étant donnée une urne avec* n *boules, étiquetés* $1,...,n$. *On fait* p *tirages.*
Deux possibilités : sans ou avec remise des boules entre deux tirages.
Deux sous-possibilités : quand on note les résultats, on peut tenir compte de l'ordre d'apparition des

nombres (regarder les "arrangements") ou l'ignorer ("combinaisons").
Le nombre de résultats possibles est dans le tableau suivant

	Sans répétition	Avec répétition
attention à l'ordre (arrangements)	$A_n^p := \frac{n!}{(n-p)!}$ **(1)** $= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$	$n^p = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ **(2)**
en ignorant l'ordre (combinaisons)	$C_n^p := \frac{n!}{(n-p)!p!}$ **(3)**	$\Gamma_n^p := C_{n+p-1}^{n-1}$ **(4)** $= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemple 1.16. (1) Nombre de manières de choisir ses Top 10 ($p = 10$) parmi n chansons
(2) Nombre de textes possibles de longueur p (alphabet avec n lettres)
(3) Nombre de résultats du loto 6 sur 49 (ou p sur n)
(4) Nombre de distributions possibles des voix quand p électeurs votent pour n candidats

Démonstration (1) arrangements sans répétition :
pour le premier tirage il y a n possibilités
pour le deuxième tirage il y a $n-1$ possibilités
...
pour le $p$ème tirage il y a $n-p+1$ possibilités
donc en total $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$ possibilités

(3) combinaisons sans répétition : les p boules tirés ont pu être tiré dans $p!$ ordres différentes. Chaque combinaison correspond donc à $p!$ arrangements différents. Le nombre de combinaisons est $\frac{A_n^p}{p!}$

Définition 1.17. Les nombres C_n^p ($=$ #façons de choisir p éléments parmi n) s'appellent les *coefficients binomiaux*. Autre notation : $\binom{n}{p}$ (dehors France)

(2) facile

(4) On veut démontrer que le nombre de combinaisons possibles est de C_{n+p-1}^{n-1}. Dessinons $n+p-1$ cercles. Par exemple, si $n = 4$ et $p = 9$, on dessine 12 cercles

$$\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$$

Supposons le tirage a donné k_1 fois la boule 1, ... , k_n fois la boule n (avec $k_1 + \ldots + k_n = p$). Cela me donne une façon de choisir $n-1$ cercles parmi les $n+p-1$ de la façon suivante : j'ignore les k_1 premières boules, je sélectionne la $k_1 + 1$ème, ignore encore k_2 boules, sélectionne la suivante, etc. Par exemple, si $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 0$, $k_4 = 3$, je dessine

$$\bigcirc \bigcirc \otimes \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \otimes \otimes \bigcirc \bigcirc \bigcirc$$

Le résultat du tirage est uniquement déterminé (en ignorant l'ordre) par le choix des $n-1$ cercles, et chaque choix de $n-1$ cercles peut s'obtenir de cette façon. Il y a C_{n+p-1}^{n-1} différents choix de p cercles, et donc C_{n+p-1}^{n-1} combinaisons. □

Théorème 1.18. *(Propriétés des coefficients binomiaux)*
(a) $\forall n,\ C_n^0 = C_n^n = 1$
(b) $\forall n,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
(c) $\forall (k,n),\ C_n^k = C_n^{n-k}$

(d) si $1 \leqslant k \leqslant n$, *alors* $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$
(e) Formule du triangle de Pascal : si $1 \leqslant k \leqslant n$, *alors*

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

(f) Formule du binôme de Newton : si $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Remarque 1.19. par (e) on peut calculer les C_n^k par le “triangle de Pascal”. **[**Expliquer, montrer le calcul au moins jusqu'à la ligne 4.**]**

Démonstration (a), (b) faciles.
(e)

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k =& \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ =& \frac{k \cdot (n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} \\ =& \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \end{aligned}$$

(c), (d), (f) exo.

Exemple 1.20. Un exemple de (f) : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

2. Espaces probabilisés

Définition fausse 2.1. Soit Ω un ensemble. Une *probabilité* sur Ω est une fonction

$$\mathbb{P} \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

qui à chaque événement $A \subset \Omega$ associe un nombre, qu'on appelle la probabilité de A. Cette fonction doit satisfaire :

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(2) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ est une collection (finie ou infinie) de sous-ensembles *disjoints* de Ω, alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots$$

[Interpétation : Si $\Omega = \{$résultats d'une expérience aléatoire$\}$, alors Ω est de "volume" 1, et $\mathbb{P}$ mesure le volume de l'événement A.]

Correction de la définition 2.2. Si Ω est fini ou si $\Omega = \mathbb{N}$ ou si $\Omega = \mathbb{Z}$, alors la définition est déjà correcte ! En revanche, pour $\Omega = \mathbb{R}$, par exemple, aucune telle fonction $\mathbb{P}$ existe. On ne devrait pas demander que $\mathbb{P}(A)$ soit défini pour *tous* les sous-ensembles $A \subset \Omega$, mais que pour ceux appartenant à une certaine famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ qui s'appelle une *tribu* ou *σ-algèbre* de Ω.

Dans le cadre de ce cours, penser que tout événement possède une proba est certes faux, mais n'induit pas de graves erreurs dans l'immédiat.

Exemple 2.3. où Ω est fini. Expérience aléatoire : tirer une fois d'une urne avec 2 boules vertes, une rouge, une bleue. $\Omega = \{V, R, B\}$, $\mathbb{P}(V) = 0,5 (= 50\%)$, $\mathbb{P}(R) = 0,25 (= 25\%)$, $\mathbb{P}(B) = 0,25$, $\mathbb{P}(\text{“pas rouge”}) = \mathbb{P}(V \cup B) = 0,75$.

Exemple 2.4. où Ω est infini. Expérience : choisir un nombre réel x aléatoirement uniformément dans l'intervalle $[0,1]$. **[**Beaucoup de logiciels sur ordinateurs ont cette fonction.**]** $\Omega = [0,1]$. Pour tout intervalle $[a,b] \subset [0,1]$, quelle est la probabilité que x soit dans $[a,b]$? Rép : $\mathbb{P}([a,b])$=longueur de l'intervalle$= b-a$. Remarquez : pour tout nombre $c \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(\{c\}) = 0$!

Proposition 2.5. *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, et si $A, B \subset \Omega$, alors*
(a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
(b) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
(c) Si $A \subset B$ (l'événement A implique B), alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

Démonstration (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)) \text{ (réunion disjointe)} \\
&= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + \mathbb{P}((B \setminus A) \cup (A \cap B)) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

(b) $\Omega = A \cup A^c$ (réunion disjointe), donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) &= \mathbb{P}(A \cup A^c) \\
&= \mathbb{P}(\Omega) \\
&= 1
\end{aligned}$$

(c) $B = A \cup (B \setminus A)$ (réunion disjointe), donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$ □

Notation 2.6. $\emptyset$ l'*événement impossible*
Si $A \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(A) = 0$, alors A est *presque impossible*
Ω est l'*événement certain*
Si $A \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(A) = 1$, alors A est *presque certain*.
Si A et B sont disjoints on dit aussi qu'ils sont des *événements incompatibles*.

Le cas particulier où Ω est fini

Observation 2.7. Supposons Ω est fini : $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Alors pour spécifier une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, il suffit de donner les nombres $p_1 = \mathbb{P}(\omega_1), \ldots, p_n = \mathbb{P}(\omega_n)$.

Exemple 2.8. Dans l'Exemple 2.3, $\mathbb{P}(V \overset{disjoint}{\cup} B) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(B) = 0,75$.

Proposition 2.9. *(cas de l'équiprobabilité) Supposons que Ω est fini et tous les éléments de Ω ont la même probabilité $p_i = \frac{1}{card(\Omega)}$. Alors pour tout événement $A \subset \Omega$,*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Dém C'est une conséquence immédiate de l'Observation 2.7.

Exemple 2.10. Dans l'Exemple 1.3, $\mathbb{P}(\text{“deux fois le même nombre”}) = 6/36 = 1/6$

Exemple 2.11. Un exemple célèbre : Quelle est la proba P_n que parmi n personnes il y a au moins deux avec le même anniversaire ? **[**Pas forcément avec le même âge, juste le même anniversaire. On oublie complications : 29 février etc.**]** Réponse :

$$P_n = 1 - \mathbb{P}(n \text{ personnes ont toutes des anniversaires différents})$$

Pour calculer ça, soit

$$\Omega = \text{ arrangements de } n \text{ anniversaires } = \{1 \text{ janv}, \ldots, 31 \text{ déc}\}^n$$

– donc $card(\Omega) = 365^n$. Soit

$$A = \{ \text{ arrangements de } n \text{ anniversaires distincts}\}$$

donc $card(A) = A^n_{365} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$. Enfin résultat :

$$P_n = 1 - \frac{A^n_{365}}{365^n}$$

Calcul : si $n = 23$, alors P_n est un peu plus grand que $0,5$!!
si $n = 47$, $0,95$

Le cas où Ω est infini mais dénombrable

Définition 2.12. L'ensemble Ω est *dénombrable* s'il existe une liste (éventuellement infinie) mentionnant tous ses éléments, c.à.d.,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots\}$$

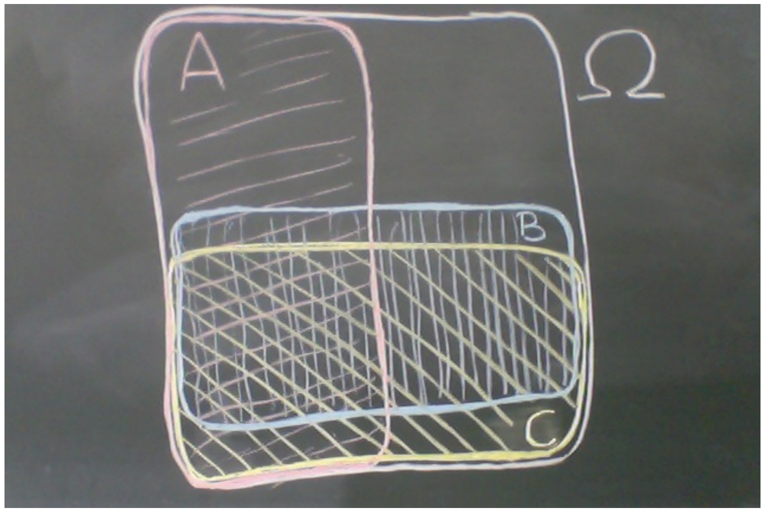
Proposition 2.13. *(analogue de 2.7) Pour spécifier une proba sur Ω dénombrable, il suffit de spécifier $p_i = \mathbb{P}(\omega_i)$ pour $i \in \mathbb{N}$, avec $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$.*

Dém admis

Exemple 2.14. Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(3) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(4) = \frac{1}{16}$, etc. (Remarquez que en effet $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$). Cette information suffit pour calculer la probabilité de tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$, par exemple $\mathbb{P}(\{2,4\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$

3. Probabilité conditionnelle et indépendance

Exemple 3.1. Soit $\Omega = \{\text{hommes français de 30-60 ans}\}$. Trois sous-ensembles :
$A = \{$ ceux de taille de chaussures plus élevé que la médiane $\}$
$B = \{$ ceux avec nombre d'années d'études plus élevé que la médiane $\}$
$C = \{$ ceux avec revenus plus élevés que la médiane $\}$



A et B sont (à peu près) indépendant : si je sais que Monsieur X appartient à B, ça ne donne pas d'information sur sa probabilité d'appartenir aussi à A. Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Autrement dit :

$$\underbrace{\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}_{\text{Proba. d'appartenir à } A \text{ parmi ceux qui appartiennent à } B} = \mathbb{P}(A)$$

En revanche, nombre d'années d'étude et revenu sont positivement corrélés : si je sais que Monsieur X appartient à C, ses chances d'appartenir aussi à B sont plus grands que $\mathbb{P}(B)$. Donc

$$\mathbb{P}(B \cap C) > \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Autrement dit :

$$\underbrace{\frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}}_{\text{Proba. d'appartenir à } B \text{ parmi ceux qui appartiennent à } C} > \mathbb{P}(B)$$

(Il y a aussi la possibilité d'une corrélation négative, où $\mathbb{P}(B \cap C) < \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$)

Définition 3.2. Soit Ω un univers muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soient $A, B \subset \Omega$ des événements.

(a) Supposons que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors $\mathbb{P}(A|B)$ (autre notation courante : $\mathbb{P}_B(A)$), la *probabilité conditionnelle* de A sachant que B est réalisée (ou proba conditionnelle en B), est définie comme suit :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(b) Supposons que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors A et B sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Exercice 3.3. Soit Ω un univers muni d'une proba $\mathbb{P}$, et soit $B \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(.|B)$ est bien une proba sur Ω.

Lemme 3.4. *Deux événements A et B avec $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$ sont indépendants*
si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
si et seulement si $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Démonstration immédiate à partir des définitions.

Exemple 3.5. (a) Deux lancés successives et indépendantes d'une pièce truquée : Pile avec proba p, Face avec proba $1-p$. Soit
$A = \{$premier lancer pile$\}$, $B = \{$deuxième lancer pile$\}$.
Alors $\mathbb{P}(A) = p$, $\mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((\text{pile,pile})) = p^2 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

(b) On joue au pile ou face successivement, jusqu'à la première apparition de Face. Alors

$$\mathbb{P}(\text{première apparition de Face au } n\text{ème lancer}) = p^{n-1}(1-p)$$

[Interprétation : temps d'attente jusqu'au premier succès. On va utiliser cet exemple plus tard (Exemple 4.18)]

Exemple 3.6. On jette deux dés.
$A =$ la somme des deux dés est $4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$
$B =$ le premier dé donne $1 = \{(1,1),...,(1,6)\}$.
$A \cap B = (1,3)$. Alors

$$\mathbb{P}(A) = 3/36 = 1/12 \text{ et } \mathbb{P}(B) = 6/36 = 1/6, \text{ donc } \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 1/72$$

mais $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/36$. Donc $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ - les deux événements ont une corrélation positive. En fait $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{6} > \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A)$

Proposition 3.7. *Si A et B sont indépendants, alors A^c et B sont aussi indépendants.*

Démonstration Par le Lemme 3.4 il suffit de montrer que $\mathbb{P}(A^c|B) = \mathbb{P}(A^c)$. Or

$$\mathbb{P}(A^c|B) \overset{3.3}{=} 1 - \mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^c)$$

où la deuxième égalité vient l'hypothèse que A et B sont indépendants et du Lemme 3.4. $\square$

Trois formules importantes

Proposition 3.8. *(Formule des probas composées) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements de Ω tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$, alors*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Démonstration par récurrence. Pour $n = 2$, c'est la définition de la probabilité conditionnelle. $n-1 \Longrightarrow n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n) &\overset{\text{definition}}{=} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \\ &\overset{\text{recurrence}}{=} \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}))\end{aligned}$$

Exemple 3.9. Urne avec 3 boules rouges, 3 blanches. Je tire trois fois sans remise. $\mathbb{P}(BBB) = ?$

Réponse : événements B_i = blanc au $i$ème tirage.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(BBB) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) \\ &= 3/6 \cdot 2/5 \cdot 1/4 \\ &= 1/20\end{aligned}$$

Définition 3.10. Une collection (finie ou infinie) $B_1, B_2, B_3, \ldots \subset \Omega$ de sous-ensembles de Ω forme une partition de Ω si

- ils sont deux-à-deux disjoints
- $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots = \Omega$

Rappel 3.11. Si $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots$ est une partition, alors

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(B_3) + \ldots$$

Exemple 3.12. Pour tout $B \subset \Omega$, on a une partition $\Omega = B \cup B^c$

Lemme 3.13. *(Formule des probabilités totales) Soit $B_1, B_2, \ldots \subset \Omega$ une collection finie ou infinie d'événements qui forme une partition de Ω. Alors*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

Démonstration exercice □

Proposition 3.14. *(Formule de Bayes) Sous la même hypothèse que 3.13, et si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors pour $i = 1, 2, \ldots,$*

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \ldots}$$

Démonstration Numérateur $= \mathbb{P}(A \cap B_i)$, dénominateur $\overset{3.13}{=} \mathbb{P}(A)$. □

Application typique de la formule de Bayes : un événement observé peut avoir plusieurs causes, et on veut calculer leur probabilité.

Exemple 3.15. Il y a deux types de plombiers : compétents (qui réparent mes WC correctement avec une proba de 0,9) et incompétents (proba 0,6). La proba qu'un plombier choisi au hasard dans l'annuaire soit compétent est $\frac{1}{3}$. J'appelle un plombier au hasard, et il répare mes WC correctement. Quelle est la probabilité qu'il soit en fait compétent ? Réponse : épreuve aléatoire : appeler au hasard, attendre le résultat de la réparation. événements $C =$compétent, $R =$bien réparé

$$\mathbb{P}(C|R) = \frac{\mathbb{P}(R|C) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R|C) \cdot \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(R|C^c) \cdot \mathbb{P}(C^c)} = \frac{0,9 \cdot \frac{1}{3}}{0,9 \cdot \frac{1}{3} + 0,6 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

Donc une seule réparation réussie n'est pas un signal fort qu'il est compétent !

4. Variables aléatoires discrètes

Définition fausse 4.1. Considérons un ensemble Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Une *variable aléatoire* (abbréviation v.a., en anglais "random variable") sur Ω est une fonction $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$.

Correction de la définition 4.2. (hors programme) Ω est muni d'une *tribu* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, et la fonction X ne doit pas être trop sauvage : pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, t]) \subset \Omega$ doit appartenir à la tribu $\mathcal{A}$.

Exemple 4.3. (a) Je jette deux dés. Alors $\Omega = \{(1,1),(1,2),...(6,5),(6,6)\}$. On peut définir $X(i,j) = i+j$ (la somme des deux dés).

(b) Je joue au pile ou face n fois. Alors $\Omega = \{P,F\}^n$, et on peut définir deux variables aléatoires X et Y : pour tout $\omega \in \Omega$, soit
* $X(\omega) =$ nombre d'apparitions de "P"
* $Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \text{ ne contient que des “F”} \\ k & \text{si la première apparition de “P” est lors du } k\text{-ème lancer.} \end{cases}$

(c) $\Omega = \{$êtres humains vivants$\}$, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\omega) = 1/7$ millard, $X(\omega) =$âge que ω aura au moment de sa mort. **[**C'est une v.a. très étudiée par les statisticiens, en particuliers ceux qui travaillent pour des assurances.**]**

(d) un exemple d'une v.a. à valeurs dans tout $\mathbb{R}_+$. épreuve aléatoire : je sélectionne une particule d'une substance radioactive, et j'attends sa décomposition. $\Omega = \{$atomes de la substance$\}$, $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto$ temps jusqu'à la décomposition.

Variables aléatoires discrètes

Définition 4.4. Une variable aléatoire X est dite *discrète* si son image $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ est dénombrable.

Remarque 4.5. Dans ce cours, toutes les v.a. discrètes X que nous étudierons en détail seront très sages : elles satisfont
* Ω est fini ou dénombrable, et
* $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Notation 4.6. Soit $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. discrète. Alors pour tout nombre $x_i \in X(\Omega)$, on écrit "$X = x_i$" pour l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$. Par exemple, dans l'Exemple 4.3(a) ($X =$somme de deux dés)

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = 0,05555\ldots$$

Définition 4.7. La *loi* de probabilité (en anglais: probability distribution) d'une variable aléatoire discrète X est la probabilité $\mathbb{P}_X$ sur l'ensemble $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{P}_X(\{x_i\}) \ = \ \mathbb{P}(X = x_i)$$

Commentaire C'est une définition qui a l'air abstraite, mais c'est un objet intuitif et très important. Quand on étudie la *loi* d'une variable aléatoire, on oublie tout le modèle du monde réel sous-jacent, toute l'expérience aléatoire etc : pour spécifier la loi on doit juste dire quel nombre est tiré avec quelle probabilité. On peut penser que la loi d'une variable aléatoire est une boîte noire avec un bouton et un écran qui peut afficher juste un nombre. Chaque fois qu'on appuie sur le bouton, la boite affiche un nombre au hasard – mais les fréquences rélatives des nombres sont distribués selon la loi en question.

Exemple 4.8. (voir 4.3(b)) Je joue au pile et face 2 fois. $\Omega = \{$(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)$\}$, $X\colon \Omega \to \{0,1,2\}$, $\omega \mapsto$ nombre de "pile". Loi de la v.a. X :

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

[Donc ici, la boite noire dit "0" dans 25% des cas, "1" dans 50% des cas, et "2" dans 25% des cas.]

Première visualisation 4.9. La loi d'une variable aléatoire discrète peut être représentée visuellement par son *diagramme en bâtons*. Par exemple pour la loi de l'Exemple 4.8: [Dessiner le diagramme en bâtons de 4.8]

Définition 4.10. La *fonction de répartition* d'une loi est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $t \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant t)$.

Deuxième visualisation 4.11. Le graphe de la fonction de répartition. (Remarquer que $lim_{t\to-\infty}F = 0$, que F est croissante, et que $lim_{t\to\infty}F = 1$. Dans le cas de l'exemple 4.8 :

Attention erreur populaire : ne pas confondre *diagramme en bâtons* et *fonction de répartition*.

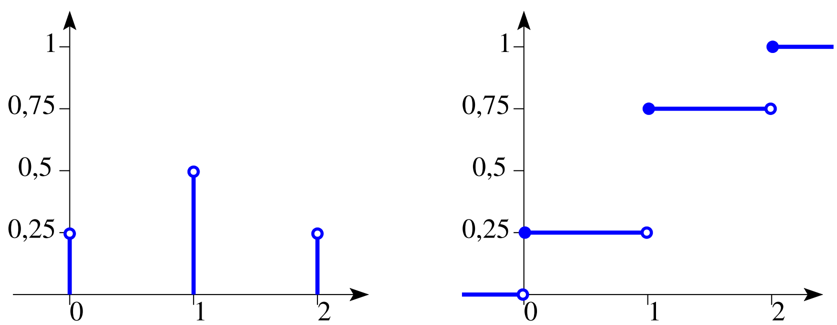


Diagramme en bâtons et fonction de répartition de l'Exemple 4.8

Proposition 4.12. *Si X et Y sont deux v.a. et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la somme $X+Y$, le produit $X \cdot Y$, et le multiple scalaire $\lambda \cdot X$ sont aussi des v.a.. Si X et Y sont discrets alors $X+Y$, $X \cdot Y$ et λX le sont aussi.*

Démonstration admis

Rappel 4.13. sur les suites et séries. Considérons la série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$, où $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombre réels.

(a) On dit la série est *convergente* si la suite des sommes partielles $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ est convergente. Exemple : série convergente $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$.

(b) Une condition nécessaire pour que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge est que $(a_i) \to 0$. Cette condition n'est pas suffisante - par exemple $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty$ (série divergente)

(c) Soit $q \in [0,1[$. Alors $(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1$. Par changement de variables $p = 1-q$ on obtient :

$$p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = 1$$

Lois discrètes classiques

Exemple 4.14. (Loi uniforme - en anglais “uniform distribution”) épreuve aléatoire : une urne contient n boules, numérotés $1, ..., n$. On en prend une au hasard.

$$\Omega = \{\text{les boules}\},\ X\colon\ \Omega \to \{1, ..., n\}, \omega \mapsto \text{le numero de la boule } \omega$$

[Pour $n = 6$ on obtient un modèle du dé non-pipé.]

Notation $[\![1, n]\!] = \{1, ..., n\}$

Définition On dit une v.a. $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si
* $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et
* pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$

Notation $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

DESSINER diagramme en batons

Convention 4.15. Dans un jeu de pile ou face, on va interpréter Pile comme un succès et Face comme un échec.

Exemple 4.16. (Loi de Bernoulli) épreuve aléatoire : on joue au pile ou face avec une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité p. Donc

$$\Omega = \{\text{pile, face}\},\ \mathbb{P}(\text{pile}) = p,\ \mathbb{P}(\text{face}) = 1 - p$$

$$X : \Omega \to \{0, 1\},\ \text{pile} \mapsto 1, \text{face} \mapsto 0.$$

Définition On dit une v.a. $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p (avec $0 < p < 1$) si
* $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et
* $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

Notation $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.

DESSINER diagramme en batons

Une généralisation :

Exemple 4.17. (Loi binomiale - cette loi compte le nombre de succès parmi n essais indépendants.) épreuve aléatoire : avec la même pièce, on joue au pile ou face n fois, et on compte le nombre de "pile".

$$\Omega = \{\text{pile, face}\}^n,\ \text{et } X\colon\ \Omega \to [\![0, n]\!],\ \omega \mapsto \text{ nombre de "pile"}$$

Si ω contient k fois "Pile" et $n - k$ fois "Face", alors $\mathbb{P}(\omega) = p^k(1 - p)^{n-k}$. Or, il y a C_n^k façons de distribuer les k "Pile" sur les n lancers, donc

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k \cdot p^k(1 - p)^{n-k}.$$

Définition On dit une v.a. $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p), si
* $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
* pour $k \in [\![0, n]\!]$ on a $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

Notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

[Pour $n = 1$ on obtient la loi binomiale.]
DESSINER diagramme en batons.)

Exemple 4.18. (Loi géométrique - cette loi mesure le temps d'attente jusqu'au premier succès d'une suite d'essais indépendants.) épreuve aléatoire : toujours avec la même pièce, on joue au pile ou face jusqu'au premier P. Alors

$$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFP, ...\}$$

et

$$X\colon\ \Omega \to \mathbb{N},\ \ \omega \mapsto \text{longueur du mot } \omega$$

La probabilité de $(F...FP)$ ($k-1$ fois la lettre F, suivi par $\mathbb{P}$) est $(1-p)^{k-1} \cdot p$

Définition On dit une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi géométrique de paramètre p si
* $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
* $\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ **[**Remarquez que $\sum \mathbb{P}(X = k) = 1$ par 4.13(c)**]**

Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$

Exercice Démontrer que c'est la "loi d'une v.a. sans mémoire" : si $K > 0$ et $k > 0$ alors

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > K + k \mid X > K)$$

(Indication : montrer d'abord que $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$)

[Pas de mémoire, car si j'ai déjà obtenu 10 fois face, alors ça ne m'apporte aucune nouvelle information sur la probabilité future de Pile. (Ceci est à contraster avec la variable aléatoire X suivante : $\Omega = \{\text{êtres humains}\}$, $X(\omega) =$durée de vie de ω (en années). La probabilité que la durée de vie d'une personne prise au hasard est supérieure à $k =$30 ans est bien différente de la probabilité que la durée de vie d'une personne prise parmi celles de durée de vie au moins $K = 70$ ans soit supérieure à $K + k = 70 + 30 = 100$ ans.)**]**

Exemple 4.19. (la loi hypergéométrique) Pas le temps.

Exemple 4.20. (Loi de Poisson) **[**d'après Siméon Denis Poisson, 1781 - 1840**]**

Définition On dit une v.a. $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$) si
* $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
* $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Remarque ceci est bien une loi, car $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

Remarque Occurrences dans la vraie vie :
* nombre de décompositions de particules par seconde dans une substance radioactive
* nombre de requêtes par microseconde à google.fr autour de 9h
* nombre de fautes de frappe par page dans un livre
...

Il n'y a pas de modèle simple, c'est une loi limite : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}$ très grand, et soit $p = \lambda/n$ (donc p est très petit). Je fais n fois un essai dont la probabilité de succès est de p (beaucoup d'essais avec individuellement peu de chances). La variable aléatoire X compte le nombre de succès (en moyenne il y en a toujours $n \cdot p = \lambda$). Alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (quand $n \to \infty$). Plus formellement

Proposition 4.21. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, une variable binomiale avec paramètres n et $p = \frac{\lambda}{n}$. Soit $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson). Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(X_n = k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(Y = k)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\end{aligned}$$

Pour λ et k fixés, on regarde la limite quand $n \to +\infty$:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \longrightarrow 1, \quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\lambda} \quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \longrightarrow 1,$$

et donc $\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(Y = k)$. □

5. Espérance et Variance

Définition 5.1. L'espérance (anglais : expected value) d'une v.a. discrète X est le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

[Idée : c'est la moyenne !! Quand vous entendez "espérance", pensez "moyenne" !]

Par définition, l'espérance d'une v.a. ne dépend que de sa loi. L'interprétation est peut-être plus claire avec une autre formule:

Proposition 5.2. *Si Ω est fini ou dénombrable, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) \cdot X(\omega)$*

Interprétation une v.a. est "une variable qui ne prend pas une valeur numérique fixe, mais différentes valeurs avec des probas différentes". L'espérance est la moyenne de toutes ces valeurs, pondérées selon leur probabilité.

[Interprétation en termes d'argent : on me propose le jeu suivant. J'achète un billet pour A Euros. Ensuite on tire un nombre réel selon une certaine loi décidée à l'avance. Si le nombre tiré est x, alors je reçois x Euros. Question : jusqu'à quel prix A du billet est-ce que je devrais accepter ? Réponse : à long terme, si le billet coûte moins de (l'espérance de la loi) Euros, alors je fais un profit.]

Exemple 5.3. Pour un groupe Ω de n adultes on veut calculer la moyenne d'âge. Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $\omega \mapsto age(\omega)$.

$$\begin{aligned}
\text{moyenne d'age} &= \frac{\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)}{n} \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{n} \cdot X(\omega) \text{ (ecriture Prop 5.2)} \\
&= \sum_{\alpha=18,19,\dots,150} \alpha \cdot \text{(Proportion de personnes ayant exactement } \alpha \text{ annees).(ecriture Def 5.1)}
\end{aligned}$$

Exemple 5.4. Sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ soit $\mathbb{P}(k) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2}$, c'est une proba - en effet, on peut montrer que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$. Soit $X(k) = k$. Cette v.a. n'a pas d'espérance, car $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right)$ est une série divergente.

Proposition 5.5. *(Propriétés de l'espérance) Soit Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors:*

(1) *Addition:* $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
(2) *Addition d'un réel:* $\mathbb{E}(X + a) = \mathbb{E}(X) + a$
(3) *Multiplication par un réel:* $\mathbb{E}(b \cdot X) = b \cdot \mathbb{E}(X)$
(4) *Composition: Si X est une V.A. discrète pouvant prendre ses valeurs parmi les valeurs x_i, alors*

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \textstyle\sum_{x_i\in X(\Omega)} \varphi(x_i) \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

Dém (1) *Addition.* A partir de la definition

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} (X(\omega) + Y(\omega))\, \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

(3) *Multiplication par un réel.*

$$\mathbb{E}(bX) = \sum_{x_i\in X(\Omega)} bx_i\mathbb{P}(X = x_i) = b \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}(X = x_i) = b \cdot \mathbb{E}(X)$$

(2) & (4) : exercice. □

Définition 5.6. Soit X une variable aléatoire sur Ω, et supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe. La *variance* de X est le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

L'écart-type (anglais : standard deviation) de X est

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque 5.7. Interprétation : $\mathbb{V}(X)$ petit $\implies$ valeurs de X concentrées autour de $\mathbb{E}(X)$. $\mathbb{V}(X)$ grand $\implies$ valeurs de X éparpillées.

Remarque 5.8. Si X est discrète, alors
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}(X = x_k)$$

Proposition 5.9. *Soit $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. Alors*

(1) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
(2) $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$
(3) $\mathbb{V}(X + a) = \mathbb{V}(X)$ *pour* $a \in \mathbb{R}$
(4) $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2 \mathbb{V}(X)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$
(5) $\sigma(\lambda X) = |\lambda| \cdot \sigma(X)$

Dém On va démontrer (1), en utilisant les propriétés de Proposition 5.5
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mathbb{E}(X) \cdot X + \mathbb{E}(X)^2\right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2\mathbb{E}(X) \cdot X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\end{aligned}$$

Exercice : Montrer les propriétés (2),(3) et (4). □

Théorème 5.10. *L'espérance et la variance des v.a. discrètes précédemment décrites sont dans le Tableau 1.*

Démonstration partielle • Soit X une v.a. de loi uniforme $X \sim \mathcal{U}([1, n])$. Alors
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

• Soit X une v.a. de loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1, p)$. Alors
$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 1^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0^2 \cdot \mathbb{P}(X = 0) - p^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p).$$
Exercice : calculer l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

• Soit X une v.a. de loi géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$. Notons $q = 1 - p$. Alors
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \overset{(*)}{=} p \cdot \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \\ &= p \cdot \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$
où à $(*)$ je triche un peu – ça demanderait plus de justification.

• Exercice : calculer l'espérance de la loi de Poisson.

• Le reste du tableau sera admis. □

Définition 5.11. Une *médiane* d'une variable aléatoire X est un nombre réel m satisfaisant:

$$\mathbb{P}(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$$

Remarque 5.12. La médiane ne dépend que de la loi de X. Il peut y avoir plusieurs valeurs possibles pour m.

Exemple 5.13. Pour un dé équilibré, tout nombre entre 3 et 4 est une médiane. (En pratique, prendre 3,5, le milieu de l'intervalle.)

6. Variables aléatoires continues

Si vous me dites : "Choisissez un nombre réel aléatoire", je ne sais pas quoi faire. Vous devez spécifier selon quelle *loi* je dois tirer le nombre.

Jusqu'ici nous avons vu des lois *discrètes*, c.à.d. les nombres étaient tirés parmi un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$ (typiquement $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$).

Regardons maintenant l'autre extrême : tous les nombres appartenant à un certain intervalle (par exemple à $[0,1]$ ou à $]-infty, +\infty[= \mathbb{R}$) être tirés, mais chaque nombre individuellement apparait avec probabilité 0.

Notation 6.1. (Rappel) Si $I \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble, et X une v.a., alors

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I)$$

Définition 6.2. Une v.a. $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est *continue* s'il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

La fonction f s'appelle alors la *densité* de X (ou la densité de la loi de X).

Définition 6.3. La *loi* d'une v.a. continue $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est la probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{R}$ déterminée par

$$P_X(I) = \mathbb{P}(X \in I) \text{ pour tout intervalle } I \subset \mathbb{R}$$

Remarque 6.4. Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est la densité d'une loi satisfait deux propriétés :

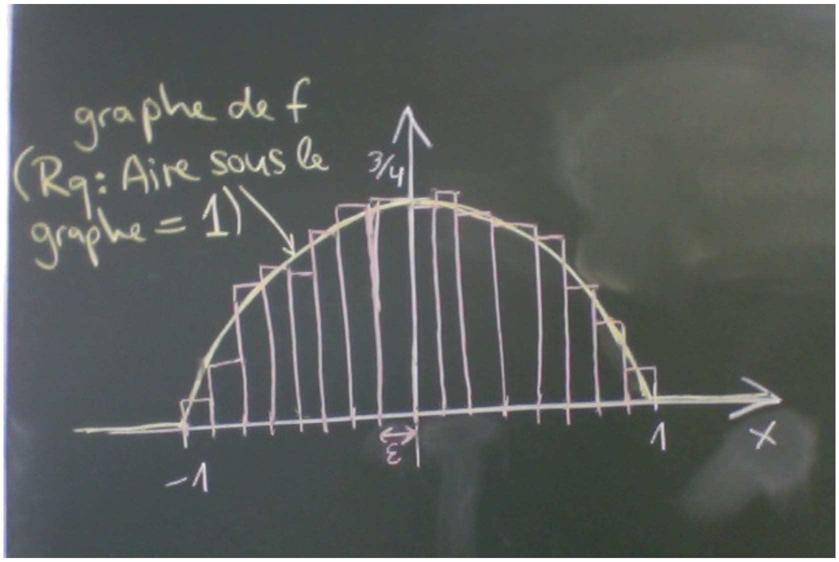
(1) $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
(2) f est intégrable et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, +\infty[) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

(Réciproquement, on peut montrer que chaque fonction satisfaisant (1) & (2) est la densité d'une loi de probabilité.)

Exemple 6.5.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on sélectionne N points de $\mathbb{R}$ au hasard, tirés selon la loi de densité f, alors le nuage de points est le plus dense en 0, et aucun point en dehors de $[-1,1]$. Dessinons un histogramme : on partitionne $\mathbb{R}$ en boîtes de largeur ϵ, et on compte quelle boîte a reçu combien de points. Si dans dans une certaine boîte il y a k points, on dessine une barre de hauteur $\frac{k}{\epsilon \cdot N}$. Alors l'histogramme va ressembler au graphe de f.



Densité d'une variable aléatoire X (jaune) et un histogramme (rouge)

Exemple 6.6. La durée de vie (en minutes) d'une particule élémentaire d'une certaine substance radioactive peut être modélisé par une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Question : quelle est la probabilité que cette durée soit comprise entre 50 et 150 minutes? Réponse :

$$\mathbb{P}(50 \leqslant X \leqslant 150) = \int_{50}^{150} f(x)dx = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx =$$
$$= \left[-e^{-x/100} \right]_{x=50}^{x=150} = e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0,384$$

Question : quelle est la probabilité que la durée soit inférieure ou égale à 300 minutes ? Réponse :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 300) = \int_{-\infty}^{300} f(x)\, dx = \int_{0}^{300} \frac{1}{100} e^{-x/100}\, dx =$$
$$= \left[-e^{-x/100} \right]_{x=0}^{x=300} = e^{0} - e^{-\frac{300}{100}} = 1 - e^{-3} \approx 0,95$$

Plus généralement, le calcul précédent démontre : si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est un nombre positif et X est une v.a. de densité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

alors

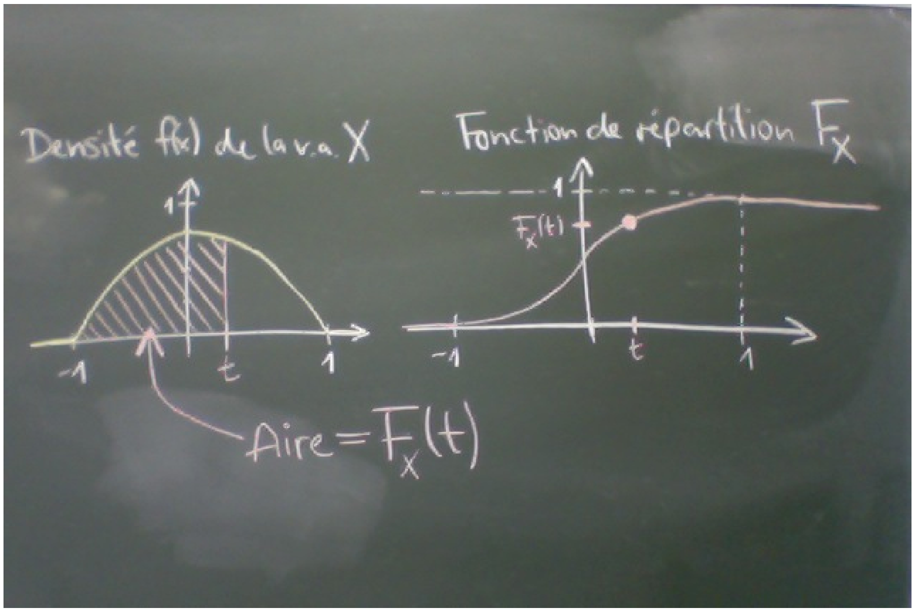
$$\mathbb{P}(X \leqslant t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Définition 6.7. La *fonction de répartition* F_X d'une variable aléatoire continue X est définie comme dans le cas discret :

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$$

Donc si X est de densité f, alors

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \text{Aire sous le graphe de } f \text{ à gauche de } t\ :$$



La densité de l'exemple 6.5 et sa fonction de répartition F_X.

Remarque 6.8. Si f est la densité de la v.a. X, alors $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$. Donc F_X est une primitive de f, et $F_X' = f$.

Définition 6.9. Soit X une variable aléatoire continue X de densité f. Alors une *médiane* de X est un nombre m tel que $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \frac{1}{2}$ (et donc $\mathbb{P}(X \geqslant m) = \frac{1}{2}$), c.à.d., $F_X(m) = \frac{1}{2}$. (Géométriquement, l'aire sous f à gauche de m doit être égal à l'aire sous f à droite de m.)

Définition 6.10. L'*espérance* $\mathbb{E}(X)$ d'une variable aléatoire continue X de densité f est le nombre

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Définition 6.11. Soit X une variable aléatoire. Notons μ son espérance : $\mu = \mathbb{E}(X)$. Alors la *variance* $\mathbb{V}(X)$ de X est le nombre

$$\mathbb{V}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$$

L'*écart-type* de X est

$$\sigma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque 6.12. Les analogues des Propositions 5.5 et 5.9 sont valables pour les v.a. continues (avec des démonstrations semblables). En particulier

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\,dx$$

Lois continues classiques

Voir le Tableau 2.

Exemple 6.13. (La loi uniforme) Idée : il pleut sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Je note les positions exactes des gouttes qui tombent sur l'intervalle $[0,1]$. Elles seront distribués selon une loi uniforme (même densité partout) sur $[0,1]$. Formellement :

Définition Une variable aléatoire X suit la *loi uniforme* sur l'intervalle $[a,b]$, si la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notation $X \sim \mathcal{U}(a,b)$.

Dessin de la densité et de la fonction de répartition $F_X(t)$.

Calculs Si $[c,d] \subset [a,b]$, alors

$$\mathbb{P}(X \in [c,d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{d-c}{b-a}$$

$=$ la proportion de l'intervalle $[a,b]$ recouvert par $[c,d]$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b+a}{2},$$

(donc la valeur moyenne est le milieu de l'intervalle $[a,b]$), et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &\left(= \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \right. \\ &\left. = \tfrac{4b^3-4a^3}{12(b-a)} - \tfrac{3(b-a)(a^2+2ab+b^2)}{12(b-a)} = \tfrac{-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3}{12(b-a)} = \tfrac{(b-a)^3}{12(b-a)} \right) \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Exemple 6.14. La loi exponentielle

Définition Une variable aléatoire X suit la *loi exponentielle de paramètre* λ si la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notation $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

La loi exponentielle est l'analogue continu de la loi géométrique. Par exemple, dans un standard téléphonique, je note les moments exacts d'appels. Si je commence à regarder à 9h17 pile, alors le temps d'attente jusqu'au premier appel va suivre une loi géométrique.

Plus formellement, en TD on démontrera : si un certain événement arrive en moyenne λ fois par minute ($\lambda \in \mathbb{R}$), mais les différentes occurrences sont indépendantes, alors le temps d'attente (en minutes) jusqu'à la première occurrence de l'événement suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Calculs • Fonction de répartition : $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (Dém.: Exemple 6.6).

DESSIN densité (bien indiquer aire sous f est 1) et fonction de répartition

• Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. Démonstration:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \, dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \\
&= \lambda \cdot \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} \, dx \\
&\overset{(*)}{=} \lambda \cdot \left(\left[\frac{x}{-\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} \right) \\
&= \lambda \cdot \left(0 - \left[\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=+\infty} \right) \\
&= \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

où l'égalité $\overset{(*)}{=}$ découle par intégration par parties : $\int u \, v' = u \cdot v - \int u' v$ avec $u = x$ et $v' = e^{-\lambda x}$ (donc $u' = 1$, $v = \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}$).

• Variance : par un calcul semblable (exercice) on montre :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice Démontrer que c'est la loi d'une v.a. sans mémoire (voir Exercice 4.15). **[**Pas de mémoire, c.à.d., si je sais qu'il n'y a pas eu d'appel téléphonique depuis 10min, ça ne m'apporte aucune information sur la probabilité d'appels futurs.**]**

Exemple 6.15. La loi la plus importante est la *loi normale* ou *loi gaussienne*. (Elle est si importante à cause du théorème central limite “TCL”, qu'on verra à la fin du cours PS1).

Définition Une variable aléatoire X suit la *loi normale d'espérance* $\mu \in \mathbb{R}$ *et de variance* $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ si la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Notation $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La *loi normale centrée réduite* est la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (espérance 0, variance 1).

On va admettre • $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = 1$ donc c'est bien une densité de probabilité.
[Les étudiants de maths, math-éco et prépa ingénieurs verront la démonstration de cette égalité en deuxième année d'études, en VAR.]

- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$

La loi normale est l'analogue continu de la loi binomiale. Rappellons qu'une v.a. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^n} C_n^k$$

Ses valeurs sont donc proportionnelles aux valeurs de la $n$ème ligne du triangle de Pascal (en forme de "cloche"). Entre autres, le TCL donnera un sens exact à la phrase : "Pour des grandes valeurs de n, la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est presque égale à une loi normale". Voir aussi le Tableau 2.

Notation Notons $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite – donc

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Il n'y a pas de *formule* pour $\Phi(t)$. Il n'y a que des tables. **[**des listes avec des valeurs approchées. Par exemple sur la version actuelle de la page Wikipédia sur la Loi Normale.**]**

Dessin de la densité et Φ. Rappel : $\Phi =$ aire sous f à gauche de t.

Exemple On suppose que la taille X, en centimètres, d'un homme âgé de 25 ans est une variable aléatoire normale de paramètres $\mu = 175$ et $\sigma^2 = 36$. Quel est le pourcentage d'hommes de 25 ans ayant une taille supérieure à 185 cm? (Vous avez le droit d'utiliser une table avec les valeurs de Φ.)
Réponse : On cherche la probabilité

$$\mathbb{P}(X > 185) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 185)$$

Nous avons vu en TD que la v.a. $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma}$ est centrée réduite :

$$X^* = \frac{X - 175}{6} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 185) &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 185) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\tfrac{X-175}{6} \leqslant \tfrac{185-175}{6}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X^* \leqslant \tfrac{5}{3}) \\ &= 1 - \Phi(\tfrac{5}{3}) \\ &\approx 1 - 0,9525 \\ &= 0,0475 = 4,75\%. \end{aligned}$$

Exemple 6.16. On dit une variable aléatoire X est *log-normale* si $Y = \ln(X)$ est normale.

Exemple 6.17. Si $X_1, \ldots, X_k$ sont des v.a. normales centrées réduites ($X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ pour $i = 1, \ldots, k$), alors $Y = X_1^2 + \ldots + X_k^2$ suit une loi qu'on appelle la *loi du χ^2 ("chi 2") avec k degrés de liberté*. Cette loi est très importante pour des tests statistiques. La densité est

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

où Γ est la "fonction Γ" – c'est une certaine fonction continue qui interpole le factoriel : $\Gamma(n + 1) = n!$.

Exemple 6.18. Une autre loi utilisée en statistiques est la *loi logistique* (voir feuille distribuée), et il y a plein d'autres.

7. Indépendance de variables aléatoires

Idée Deux v.a. X et $Y\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ sont *indépendantes* si la connaissance de la valeur de l'une n'apporte aucune information sur la valeur de l'autre. Exemple : $\Omega = \{\text{hommes adultes en France}\}$, $X =$ revenu, $Y =$ taille de chaussures.

Définition 7.1. Soient $X, Y\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a. On dit X et Y sont *indépendantes* si pour tous les intervalles $I_1 \subset \mathbb{R}$ et $I_2 \subset \mathbb{R}$, les événements

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I_1\} \text{ et } \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \in I_2\}$$

sont indépendantes; autrement dit, si

$$\mathbb{P}(X \subset I_1 \text{ et } Y \subset I_2) = \mathbb{P}(X \subset I_1) \cdot \mathbb{P}(Y \subset I_2)$$

Remarque 7.2. Si X et Y sont discrètes il suffit de vérifier que pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in X_2(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$$

Proposition 7.3. *Soient X et Y deux variables indépendantes. Alors*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration (que dans le cas où X, Y sont discrètes).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) &= \left(\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)\right) \cdot \left(\sum_{y_j \in Y(\Omega)} y_j \cdot \mathbb{P}(Y = y_j)\right) \\
&= \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} x_i y_j \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j) \\
&\overset{X,Y\ indep}{=} \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} x_i y_j \cdot \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&\overset{exercice}{=} \mathbb{E}(XY)
\end{aligned}$$

Définition 7.4. La *covariance* de deux v.a. X et Y est le nombre

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\right]$$

Interprétation 7.5. Si $Cov(X, Y) > 0$, alors X et Y sont "positivement correlés" [C.à.d. si X est relativement grand, alors Y a tendance à être relativement grand, aussi], si $Cov(X, Y) < 0$, alors X et Y sont "négativement correlés".

Proposition 7.6. $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

Démonstration

$$\begin{aligned}
Cov(X, Y) &= \mathbb{E}\left[XY - Y\mathbb{E}(X) - X\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right] \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Remarque 7.7. Si X et Y sont deux v.a. *indépendantes*, alors d'après Proposition 7.3, $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, et donc

$$Cov(X, Y) = 0$$

Exemple 7.8. ATTENTION, la réciproque est fausse

$$X, Y \text{indep} \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} Cov(X, Y) = 0$$

Par exemple, soient X, Y deux v.a. telles que

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

Alors $X(\omega) \cdot Y(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, et donc $\mathbb{E}(X \cdot Y) = 0$. Aussi, $\mathbb{E}(X) = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$, donc

$$Cov(X, Y) = 0$$

En revanche, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0$, mais $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{3}$, donc $\mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{9}$. On conclut $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0)$ donc

$$X \text{ et } Y \text{ sont dépendants.}$$

Exemple 7.9. Les deux côtés une pièce sont marqués "0" et "1". On jette cette pièce deux fois – on a donc un univers $\Omega = \{(0, 0),\ (0, 1),\ (1, 0),\ (1, 1)\}$, dont chaque élément apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$. Considérons les deux variables aléatoires

$$X((i, j)) = \min(i, j) \quad \text{et} \quad Y((i, j)) = \max(i, j)$$

Quelle est la covariance ? Réponse : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \frac{1}{4} \cdot \min(0, 0) \cdot \max(0, 0) + \frac{1}{4} \cdot \min(0, 1) \cdot \max(0, 1) + \frac{1}{4} \cdot \min(1, 0) \cdot \max(1, 0) + \frac{1}{4} \cdot \min(1, 1) \cdot \max(1, 1) = \frac{1}{4}$. Donc $Cov(X, Y) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. En particulier, les deux variables aléatoirese sont dépendants.

Théorème 7.10. *(Propriétés de la covariance) Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors*

(1) $Cov(X, X) = \mathbb{V}(X)$,
(2) *Symétrie :* $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$,
(3) *Bilinéarité :*
$Cov(a \cdot X, Y) = a \cdot Cov(X, Y) = Cov(X, a \cdot Y)$
$Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$
$Cov(X, Y_1 + Y_2) = Cov(X, Y_1) + Cov(X, Y_2)$
(4) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$.
En particulier, si X et Y sont indépendants, alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + V(Y)$.

Démonstration (1), (2), (3) très faciles. Démonstation de (4) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X + Y) &= \mathbb{E}\left(X + Y - \mathbb{E}(X + Y)\right) \\
&= \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X) + Y - \mathbb{E}(Y))^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) + 2 \cdot \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) + \mathbb{E}\big((Y - \mathbb{E}(Y))^2\big)\big) \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)
\end{aligned}$$

8. LOI DES GRANDS NOMBRES ET THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Motivation Situation typique : il y a une loi de probabilité inconnue dont je veux estimer l'espérance μ. Je ne connais pas la loi, mais je peux tirer des nombres selon elle.

Exemples (a) J'ai une pièce et je veux savoir quelle est la probabilité p de "Pile" (juste ou truquée ?). Soit $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}$, $\mathbb{P}(\text{Pile}) = p$, $\mathbb{P}(\text{Face}) = 1 - p$, $X\colon\ \Omega \to \{0,1\}$, Pile $\mapsto 1$, Face $\mapsto 0$, on veut estimer $\mathbb{E}(X) = p$.

(b) Soit $\Omega = \{\text{adultes français}\}$ $X(\omega) = 1$ si ω va voter UMP, $X(\omega) = 0$ sinon. Je veux estimer $\mathbb{E}(X)$ = pourcentage du vote pour l'UMP. Je peux téléphoner des ω au hasard et demander leur intention de vote.

Stratégie évidente pour estimer $\mu = \mathbb{E}(X)$: tirer n nombres $x_1, \ldots, x_n$ pour n assez grand, et calculer leur moyenne $s_n := \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$. Alors, pour n très grand $s_n \overset{approx}{=} \mu$.

Questions : (1) pourquoi ça marche ? (2) Comment choisir n pour avoir 95% confiance que

$$s_N \in [\mu - 0,02,\ \mu + 0,02],\quad \text{(autrement dit } |s_N - \mu| \leqslant 0,02\text{) ?}$$

Théorème 8.1. *(Inégalité de Markov) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire à valeurs non–négatives . Alors pour tout nombre réel $\lambda > 0$*

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \ \leqslant\ \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

Remarque : Pour $\lambda \leqslant \mathbb{E}(X)$ cet énoncé est vide. [L'inégalité de Markov n'est donc pas très performante, mais a la grande qualité qu'elle marche pour toutes les v.a. positives !]

Démonstration Pour $\lambda > 0$, soit

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lambda & \text{si } X(\omega) \geqslant \lambda \\ 0 & \text{si } X(\omega) \in [0, \lambda[\end{cases}$$

et par hypothèse le cas $X(\omega) < 0$ ne peut pas arriver. On a $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, et donc

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &\geqslant \mathbb{E}(Y) \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + \lambda \cdot \mathbb{P}(Y = \lambda) \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}(X < \lambda) + \lambda \cdot \mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \\ &= \lambda \cdot \mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \end{aligned}$$

et on déduit $\frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda} \geqslant \mathbb{P}(X \geqslant \lambda)$. □

Théorème 8.2. *(Inégalité de Tchebychev, ou de Bienaymé–Tchebychev) Soit $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. sur un éspace probabilisé (Ω, P). Supposons que $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$ existent. Pour tout nombre réel $k > 0$ on a*

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geqslant k\right) \ \leqslant\ \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Interprétation Tchebychev donne une borne supérieure sur la probabilité des événements loin de la moyenne – il dit que les événéments extrèmes sont rares.

Remarque : Si $k \leqslant \sigma$, l'écart-type de X, alors l'énoncé est vide. **[**L'inégalité de Tchebychev n'est donc pas très performante, mais elle marche pour toutes les lois.**]**

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant k) &= \mathbb{P}\left((X-\mu)^2 \geqslant k^2\right) \\ &\overset{Markov}{\leqslant} \frac{\mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right)}{k^2} \\ &\overset{Def\ de\ \sigma}{=} \frac{\sigma^2}{k^2}\end{aligned}$$

Exemple 8.3. Soit X une v.a., et supposons que la loi de X n'est pas connue, mais $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ le sont. Quelle est la probabilité d'obtenir une valeur en dehors de l'intervalle $(\mu - 10 \cdot \sigma, \mu + 10 \cdot \sigma)$? Autrement dit, que vaut $\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geqslant 10\sigma\right)$?

Réponse :

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geqslant 10\sigma\right) \overset{Tchebychev}{\leqslant} \frac{\sigma^2}{10^2\sigma^2} = \frac{1}{100}$$

Donc la probabilité est inférieure à 1%

Exemple 8.4. Le nombre hebdomaire de ventes de voitures pour un certain concessionnaire est une variable aléatoire X d'espérance $\mathbb{E}(X) = 16$ et variance $\mathbb{V}(X) = 9$. Donner une borne inférieure à la probabilité que les ventes de la semaine prochaine se situent entre 10 et 22, bornes incluses.

Réponse : On a $\mathbb{E}(X) = \mu = 16$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2 = 9$. On cherche une borne inférieure pour $\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 22)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 22) &= \mathbb{P}(-6 \leqslant X - 16 \leqslant 6) \\ &= \mathbb{P}(|X-16| \leqslant 6) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|X-16| > 6) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|X-16| \geqslant 7)\end{aligned}$$

et d'après Tchebychev

$$\mathbb{P}(|X-16| \geqslant 7) \leqslant \frac{9}{7^2} = \frac{9}{49}$$

Donc

$$\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 22) \ \geqslant\ 1 - \frac{9}{49} \ =\ \frac{40}{49}$$

Définition 8.5. Deux v.a. $X, Y\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), si X et Y sont indépendantes et si elles suivent la même loi de probabilité: $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant a) = \mathbb{P}(Y \leqslant a)$.

[La *loi* des grands nombres - ici, le mot "loi" veut dire "règle" ou "théorème". Ce n'est pas une loi de probabilité.]

Théorème 8.6. *(La loi faible des grands nombres) Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que toutes admettent l'espérance finie $\mathbb{E}(X_i) =$*

μ. Alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \longrightarrow 0 \quad \textit{lorsque } n \to \infty$$

Interprétation La probabilité que l'estimation $\mathbb{E}(X) \simeq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ soit fausse, par une erreur supérieure à ϵ, tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Notation 8.7. Si $X_1, X_2, \ldots$ sont des v.a. i.i.d., nous noterons S_n la variable aléatoire "moyenne des n premiers X_i":

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

Démonstration du théorème pour le cas particulier quand les variables considérées ont variance $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$ *finie*. Dans ce cas, l'indépendance implique, d'après le Théorème 7.10(4),

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) \overset{indep}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)}{n^2} = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

et d'après Tchebychev

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mu| > \epsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{c.q.f.d.}$$

[Vous vous imaginez qu'il y a aussi une loi *forte* des grands nombres. Elle dit que pour *presque toute* suite $x_1, x_2, \ldots$ de nombres réels tirés indépendamment selon la loi de X,

$$s_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)]$$

Théorème 8.8. *(Théorème central limite "TCL") Soient $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ une suite de variables aléatoires i.i.d d'espérance μ et de variance σ^2. Soit*

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

Alors la loi de la v.a.

$$\frac{S_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

tend vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $n \to \infty$. Ceci veut dire que la fonction de répartition de $\frac{S_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ tend, en tout point, vers la fonction de répartition Φ de la loi normale :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant a\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$$

Démonstration admise.

[C'est un théorème concernant une limite, et le théorème est central à la théorie de la probabilité - d'où le nom bizarre.]

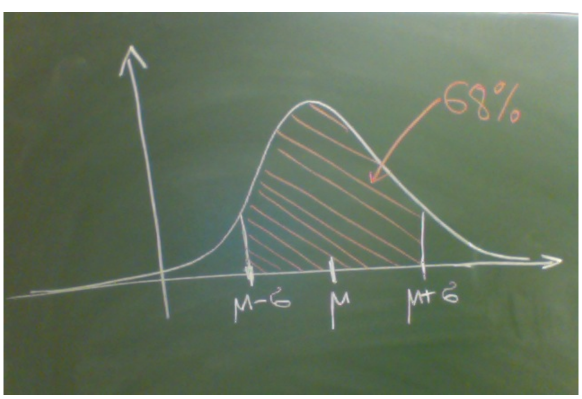
Exemple 8.9. Soient $X_1, \ldots, X_{100}$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur l'intervalle $[0,1]$. On cherche à évaluer $\mathbb{P}(\frac{X_1+\ldots+X_{100}}{100} > 0{,}53)$.

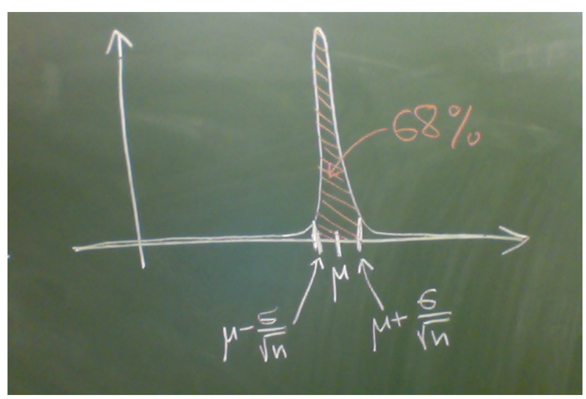
Réponse : On a $\mathbb{E}(X_i) = \mu = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{12}$, donc $\sigma = \sqrt{\frac{1}{12}}$. Alors pour $n = 100$, on a $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1200}}$, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\ldots+X_{100}}{100} > 0,53\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(S_{100} \leqslant 0,53\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{S_{100}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{0,53-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\qquad\quad \leqslant \frac{0,03}{\frac{1}{\sqrt{1200}}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\qquad\quad \leqslant 1,039\ldots\right) \\
&\overset{TCL}{\approx} 1 - \Phi(1,039\ldots) \overset{table}{\approx} 1 - 0,85 = 0,15 = \underline{15 \text{ pourcent}}.
\end{aligned}$$

Donc, si je tire 100 nombres selon une loi $\mathcal{U}([0,1])$ et je calcule leur moyenne, alors cette moyenne a des bonnes chances d'être proche de 0,5 : il n'y a que 15% de risque qu'elle soit plus grande que 0,53, et symétriquement 15% de risque qu'elle soit plus petite que 0,47. Il y a donc 70% de probabilité qu'elle soit entre 0,47 et 0,53.

Interprétation du TCL : On a vu en TD que dans la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, à peu près 68% des nombres tirés sont entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$ (et $95,4\%$ sont entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$). Si X est une v.a. arbitraire d'espérance μ et d'écart-type σ (variance σ^2), alors le TCL dit que pour grand n, la v.a. S_n ressemble à une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, d'espérance μ et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



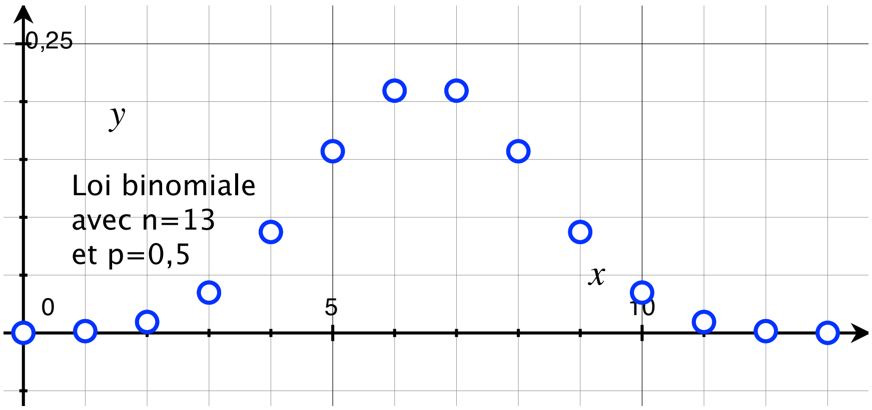


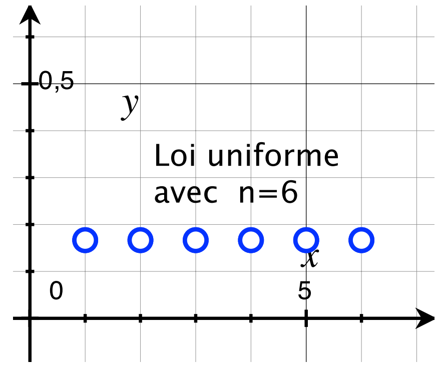
Dessin : la densité de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

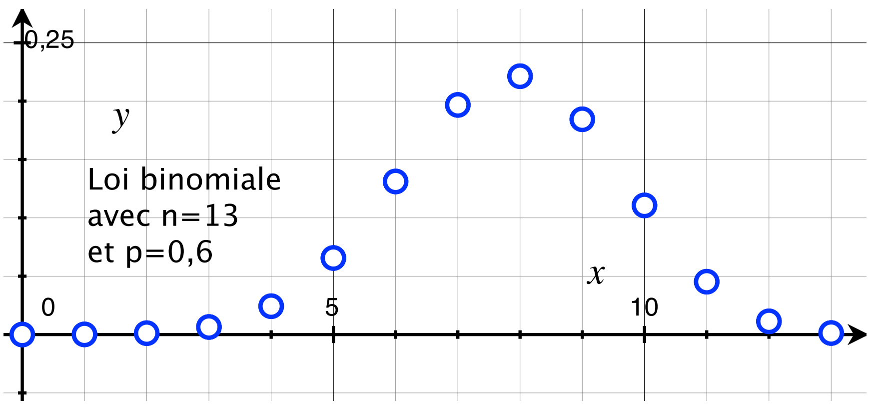
Si je tire n nombres et je calcule leur moyenne s_n, j'ai $\sim 68\%$ confiance que le résultat est à distance au plus $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ de la vraie espérance μ. Si je veux diviser par 3 l'erreur d'estimation attendu, je dois multiplier n, le nombre de tirages, par 9.

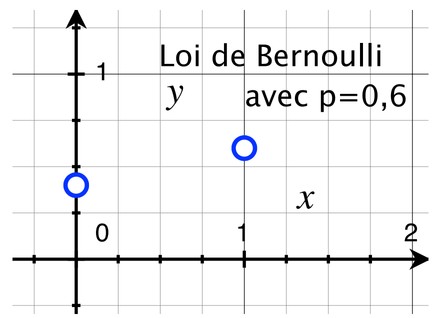
TABLE 1. **Lois discrètes classiques**

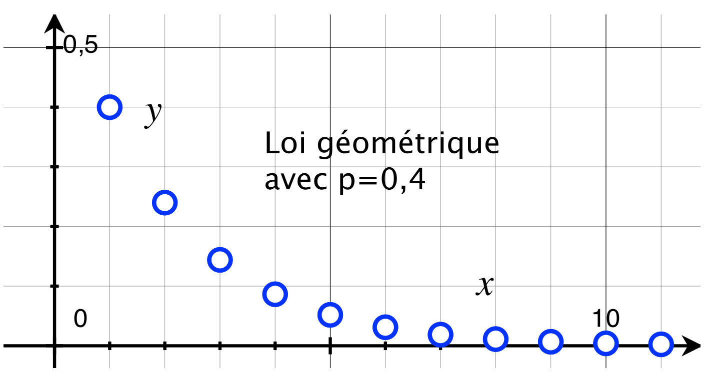
Dénomination	**Loi**	**Espérance**	**Variance**
Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$ $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ $\mathbb{P}(X = 1) = p$	$\mathbb{E}(X) = p$	$\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$
Loi Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$	$\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$
Loi Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, +\infty \llbracket$ $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, +\infty \llbracket$ $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$\mathbb{V}(X) = \lambda$


0,25
y
Loi binomiale
avec n=13
et p=0,5
x
0
5
10


0,5
y
Loi uniforme
avec n=6
x
0
5


0,25
y
Loi binomiale
avec n=13
et p=0,6
x
0
5
10


Loi de Bernoulli
1
y
avec p=0,6
x
0
1
2


0,5
y
Loi géométrique
avec p=0,4
x
0
10

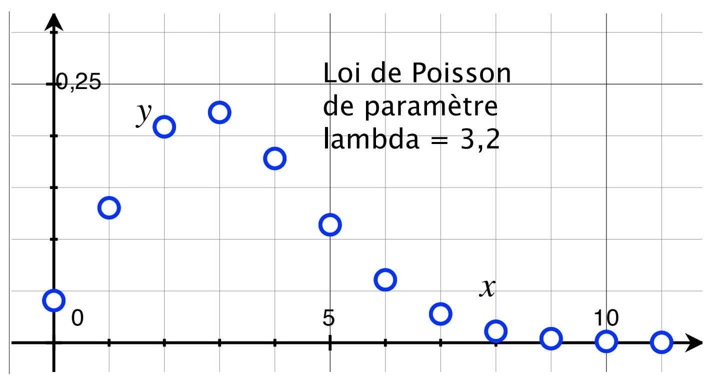
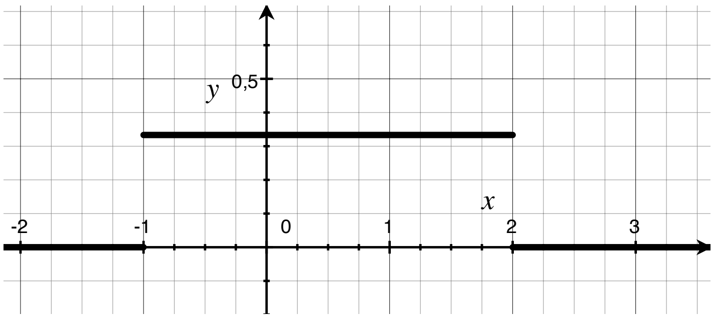
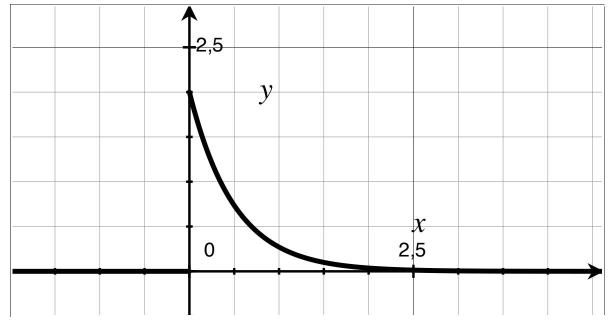

0,25
Loi de Poisson
de paramètre
lambda = 3,2
y
x
0
5
10

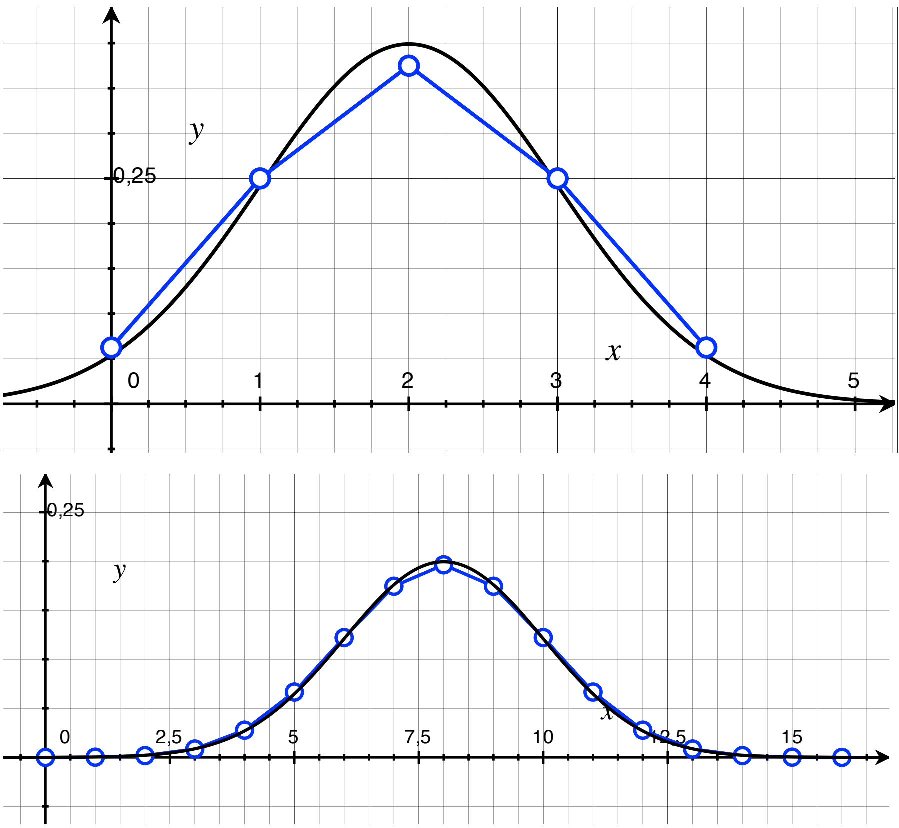
TABLE 2. **Lois continues classiques**

Dénomination	Densité	Espérance	Variance
Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b]$ $f(x) = 0, \quad x \notin [a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$ $f(x) = 0, \quad x < 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi Normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Loi Log-Normale Paramètres μ, σ	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$
Loi χ^2 (Chi-deux) Paramètre $k \in \mathbb{N}$	$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \ x \geqslant 0$ où Γ est la “fonction Gamma” $f(x) = 0, \quad x < 0$	k	$2k$
Loi Logistique Paramètres μ, s	$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)/s}}{s\left(1+e^{-(x-\mu)/s}\right)^2}$	μ	$\frac{\pi^2}{3} s^2$





(a) Loi uniforme $\mathcal{U}(-1,2)$. Sa densité est de $\frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[-1,2]$ et de 0 en-dehors de cet intervalle. (b) Densité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$



Comparaison de la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$ avec la loi normale de la même espérance et la même variance, pour $n=4$ et $n=16$