Université de Rennes 1 Année 2013–2014
Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Contrôle continu
Lundi 25 Novembre 2013, 9h20 – 10h

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire avec valeurs possibles 0,1,2,3, tel que

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{2}{10},\quad \mathbb{P}(X=1)=\frac{4}{10},\quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{3}{10},\quad \mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{10}$$

(a) Trouver l'espérance $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$, et la médiane de X. Solution :
$\mathbb{E}(X)=\frac{2}{10}\cdot 0+\frac{4}{10}\cdot 1+\frac{3}{10}\cdot 2+\frac{1}{10}\cdot 3=\frac{13}{10}=1,3.$
$\mathbb{V}(X)=\frac{2}{10}\cdot 0^2+\frac{4}{10}\cdot 1^2+\frac{3}{10}\cdot 2^2+\frac{1}{10}\cdot 3^2-\mathbb{E}(X)^2=\frac{25}{10}-\frac{169}{100}=\frac{250-169}{100}=\frac{81}{100}=0,81$
Enfin, $\mathbb{P}(X\leqslant 1)=\frac{6}{10}\geqslant\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X\geqslant 1)=\frac{8}{10}\geqslant\frac{1}{2}$. Donc la médiane est 1.

(b) Pour Y une variable aléatoire avec valeurs possibles 100, 102, 104, et 106, tel que

$$\mathbb{P}(Y=100)=\frac{2}{10},\quad \mathbb{P}(Y=102)=\frac{4}{10},\quad \mathbb{P}(Y=104)=\frac{3}{10},\quad \mathbb{P}(Y=106)=\frac{1}{10}$$

Trouver l'espérance et la variance de Y. Solution : Y a la même loi que $100+X\cdot 2$, donc $\mathbb{E}(Y)=2\cdot\mathbb{E}(X)+100=102,6$ et $\mathbb{V}(Y)=2^2\cdot\mathbb{V}(X)=\frac{324}{100}$

Exercice 2 Lois discrètes habituelles

(a) Je lance un dé 60 fois. Soit X la variable aléatoire qui décrit le nombre de fois que "6" apparaît. Donner l'espérance et l'écart-type de cette variable aléatoire. Déterminer $\mathbb{P}(X=10)$ (une formule suffit, pas de résultat numérique exigé). Solution : une loi binomiale $\mathcal{B}(60,\frac{1}{6})$. Donc $\mathbb{E}(X)=n\cdot p=60\cdot\frac{1}{6}=10$ et $\mathbb{V}(X)=n\cdot p\cdot(1-p)=\frac{50}{6}$, donc écart-type $\sqrt{\frac{50}{6}}$. On trouve $\mathbb{P}(X=10)=C_{60}^{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{50}$

(b) Dans un centre d'appel il y a en moyenne 2 appels téléphoniques par seconde qui arrivent. Le nombre d'appels par seconde suit une certaine loi de probabilité – quelle est cette loi ? Faire un dessin *approximatif* du diagramme en bâtons de cette loi. Solution : C'est une loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$. Ce qui est important dans votre dessin de $\mathbb{P}(X=k)$: le baton pour $k=2$ doit être au moins aussi haut que tous les autres, celui pour $k=0$ est plus petit que celui pour $k=2$, en plus $\mathbb{P}(X=k)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, et la somme des $\mathbb{P}(X=k)$ doit être à peu près égale à 1 (j'autorise une bonne marge d'erreur !).

(c) Un jeune couple décide d'avoir des enfants. Ils ont surtout envie d'avoir une fille. Tant qu'ils n'ont que des garçons, ils continuent de faire des enfants, jusqu'au premier bébé fille. Après cette fille, ils n'auront plus d'autres enfants. Quelle est la loi de probabilité qui décrit le nombre d'enfants qu'ils auront, et quelle est son espérance ? Plus difficile : si tous les couples du monde suivent la même stratégie, quelle sera la proportion de filles au monde ? Solution : On a vu en cours que le nombre d'essais nécessaire jusqu'au premier succès dans une série d'essais indépendants suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Ici on a $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$, qui est d'espérance $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Si tous les couples suivent la même règle, alors l'espérance du nombre d'enfants par couple est de 2, et l'espérance du nombre de filles par couple est de 1. Donc la proportion de filles dans la population est toujours égal à $\frac{1}{2}$.

Exercice 3 (Variables aléatoires continues) Considérons une variable aléatoire continue de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Déterminer $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, et $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 8)$ Solution : $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$, $\int_{2}^{2} f(x)\,dx = 0$, $\int_{2}^{8} f(x)\,dx = \frac{-1}{8} - \frac{-1}{2} = \frac{3}{8}$.

(b) Déterminer la médiane m de la loi de X, c.à.d., trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \frac{1}{2}$. Solution : on cherche m tel que $\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = \int_{1}^{m} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{m}$. On trouve $m = 2$

* * *

Formules que vous pouvez utiliser sans justification :

— Si $X \sim \mathcal{U}(\{1,\ldots,n\})$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

— Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

— Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

— Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$