Les lois de probabilité les plus importantes

TABLE 1. **Lois discrètes classiques**

Dénomination	**Loi**	**Espérance**	**Variance**
Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$	$X(\Omega) = \{1,\dots,n\}$ $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$X(\Omega) = \{0,1\}$ $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ $\mathbb{P}(X=1) = p$	$\mathbb{E}(X) = p$	$\mathbb{V}(X) = p(1-p)$
Loi Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$X(\Omega) = \{0,\dots,n\}$ $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$	$\mathbb{V}(X) = np(1-p)$
Loi Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \{1,2,3,\dots\}$ $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \{1,2,3,\dots\}$ $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{e^\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$\mathbb{V}(X) = \lambda$

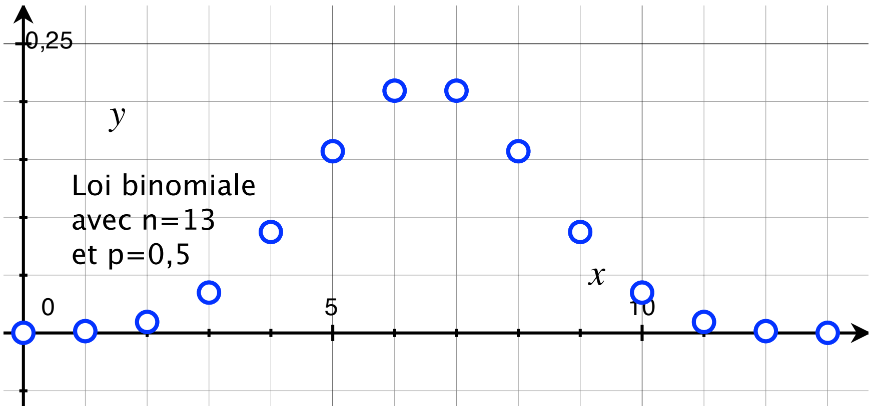
Interprétations

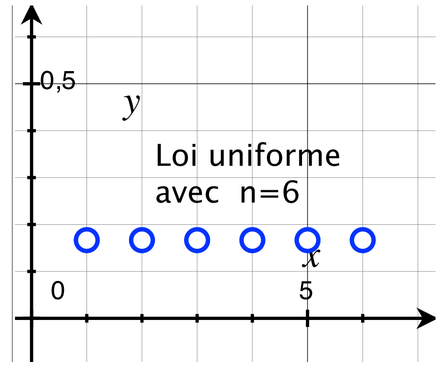
Loi uniforme : je tire un nombre entre 1 et n, tous apparaissent avec la même probabilité $\frac{1}{n}$.

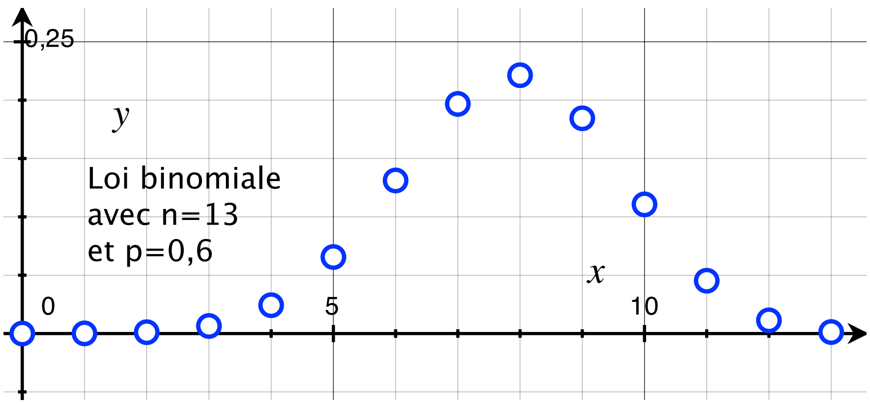
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: je fais n essais indépendants. Chaque essai a deux résultats possibles : succès (avec probabilité p) ou échec (probabilité $1-p$). Je compte le nombre de succès parmi les n essais.

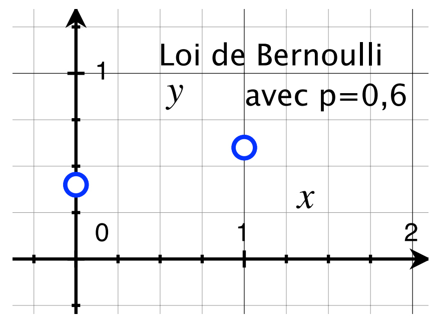
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: je fais une suite d'essais indépendants, chacun avec une probabilité de succès égale à p, et je compte le nombre d'essais qu'il me faut jusqu'au premier succes ("temps d'attente jusqu'au premier succès").

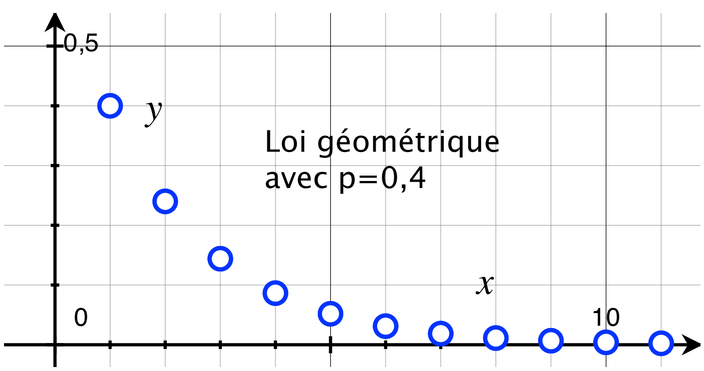
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: je fais un très grand nombre d'essais, chacun avec une très faible probabilité de succès. Le nombre d'essais et la probabilité de succès sont ajustés de telle façon qu'il y a compensation entre la très grande et la très petite quantité, et *en moyenne* on peut s'attendre à λ succès. Je compte le nombre de succès.


0,25
y
Loi binomiale
avec n=13
et p=0,5
x
0
5
10


0,5
y
Loi uniforme
avec n=6
x
0
5


0,25
y
Loi binomiale
avec n=13
et p=0,6
x
0
5
10


1
Loi de Bernoulli
y
avec p=0,6
x
0
1
2


0,5
y
Loi géométrique
avec p=0,4
x
0
10

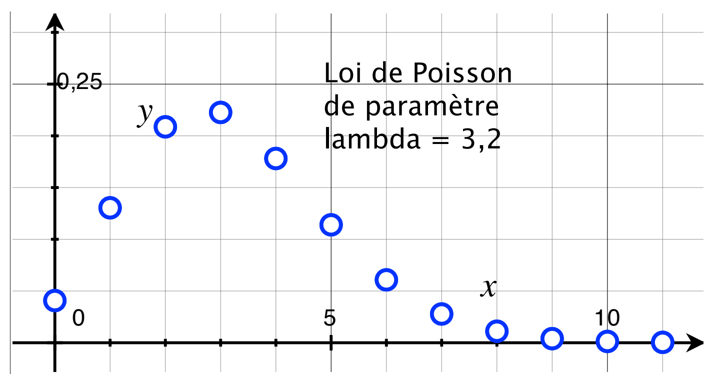

0,25
Loi de Poisson
de paramètre
lambda = 3,2
y
x
0
5
10

TABLE 2. **Lois continues classiques**

Dénomination	Densité	Espérance	Variance
Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b]$ $f(x) = 0, \quad x \notin [a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$ $f(x) = 0, \quad x < 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi Normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Loi χ^2 (Chi-deux) Paramètre $k \in \mathbb{N}$	$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \ x \geqslant 0$ où Γ est la “fonction Gamma” $f(x) = 0, \quad x < 0$	k	$2k$

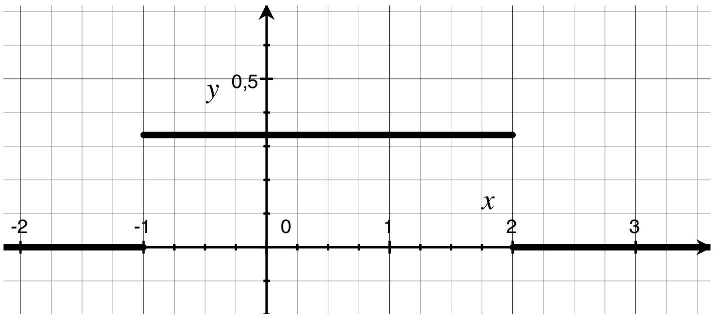
Interprétations

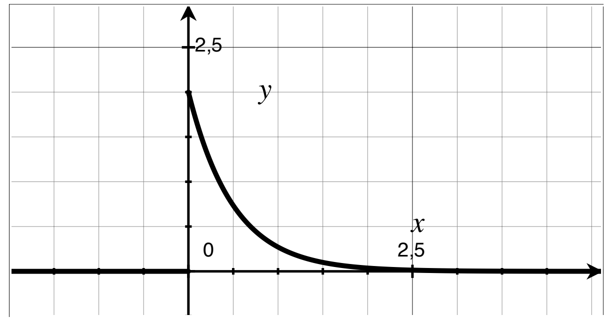
Loi uniforme : je tire un nombre réel au hasard entre a et b. Aucune région de l’intervalle $[a,b]$ est privilégiée par rapport à une autre.

Loi exponentielle : si un certain événement arrive en moyenne λ fois par seconde ($\lambda \in \mathbb{R}$), mais les différentes occurrences sont indépendantes, alors le temps d’attente (en secondes) jusqu’à la première occurrence de l’événement suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

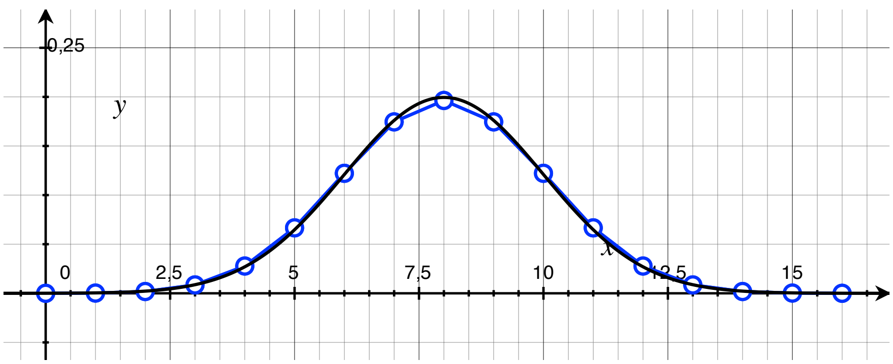
Loi normale : aussi appelée la loi de Gauss, ou gaussienne, sa densité est la célèbre courbe en cloche. Cette loi apparaît dès que l’on regarde la moyenne d’une grande quantité de nombres qui sont tirés indépendamment selon la même distribution de probabilité (c’est ce que dit le TCL). Par exemple, je joue n fois au pile ou face, avec n très grand, et je calcule $\frac{\text{nombre de Pile} - \text{nombre de Face}}{\sqrt{n}}$. Le nombre que j’obtiens est tiré selon la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Loi $\chi^2(k)$: je tire k nombres $x_1, \ldots, x_k$, indépendamment, selon la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, et je calcule $x = x_1^2 + \ldots + x_k^2$. Le nombre x est alors tiré selon la loi $\chi^2(k)$.

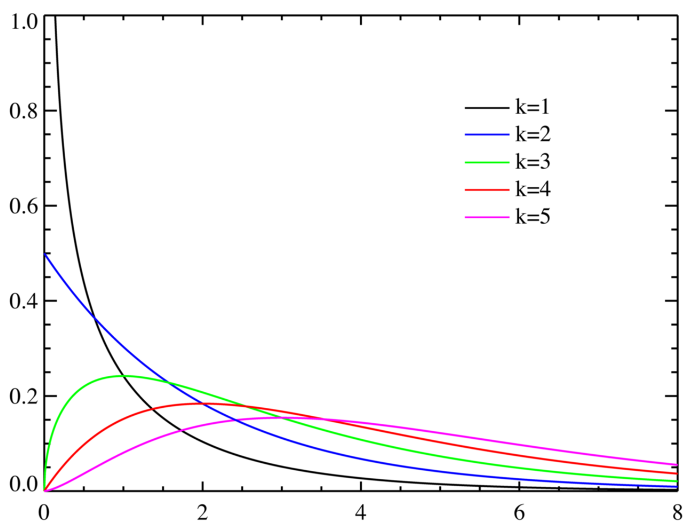




(a) Loi uniforme $\mathcal{U}([-1,2])$. Sa densité est de $\frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[-1,2]$ et de 0 en-dehors de cet intervalle. (b) Densité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$



Comparaison de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(8,4)$ avec loi Binomiale de la même espérance et la même variance $\mathcal{B}(16, \frac{1}{2})$. Leur ressemblance est prédite par le théorème central limite.



Densité de la loi $\chi^2(k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$. (source : Wikipedia)

La fonction $\Phi(x)$ La table suivante contient les valeurs de $\Phi(x)$, la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, pour x entre 0 et $3,99$. Par exemple $\Phi(0,12) = 0,54776$. Pour connaitre les valeurs de $\Phi(x)$ avec $x < 0$, on utilise la formule $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$\Phi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Quantiles Les deux tables suivantes donnent les valeurs du quantile q_p de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ défini par $q_p = \Phi^{-1}(p)$. Par exemple, si je tire un nombre au hasard selon la loi $\mathcal{N}(0,1)$, et je veux avoir 98% de probabilité (donc $p = 0,98$) que le nombre tiré soit plus petit qu'un nombre α, je dois choisir $\alpha = 2,054$.

q_p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,50	0,0000	0,0251	0,0502	0,0753	0,1004	0,1257	0,1510	0,1764	0,2019	0,2275
0,60	0,2533	0,2793	0,3055	0,3319	0,3585	0,3853	0,4125	0,4399	0,4677	0,4959
0,70	0,5244	0,5534	0,5828	0,6128	0,6433	0,6745	0,7063	0,7388	0,7722	0,8064
0,80	0,8416	0,8779	0,9154	0,9542	0,9945	1,036	1,080	1,126	1,175	1,227
0,90	1,282	1,341	1,405	1,476	1,555	1,645	1,751	1,881	2,054	2,326

... et pour des valeurs de p très proches de 1 :

p	0,975	0,995	0,999	0,9995	0,9999	0,99995	0,99999	0,999995
q_p	1,9600	2,5758	3,0902	3,2905	3,7190	3,8906	4,2649	4,4172

La loi $\chi^2(k)$ La table suivante contient les quantiles d'ordre $1-\alpha$ de $\chi^2(k)$, la loi du χ^2 à k degrés de liberté. Par exemple, si j'ai $k = 2$ degrés de liberté et je souhaite que le risque de rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0 soit au plus $0,05$ (donc 5% de risque), je dois choisir un seuil de $\chi^2_{\text{emp}} > 5,99$ pour rejeter l'hypothèse nulle.

χ^2	α=0,95	α=0,9	α=0,8	α=0,7	α=0,5	α=0,3	α=0,2	α=0,1	α=0,05	α=0,01	α=0,001
$k=1$	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.64	10.83
$k=2$	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.60	5.99	9.21	13.82
$k=3$	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	11.34	16.27
$k=4$	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
$k=5$	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
$k=6$	1.63	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81	22.46
$k=7$	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
$k=8$	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.12
$k=9$	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
$k=10$	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59