Université de Rennes 1 — Année 2013–2014

PRSB (Probabilités et Statistiques, L1 Bio)

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 On jette un dé 180 fois. On note X la variable aléatoire : "nombre de sorties du 4".

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) En utilisant le TCL, estimer la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32.

Exercice 2 Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. À un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

(a) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?

(b) On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$. Justifier qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

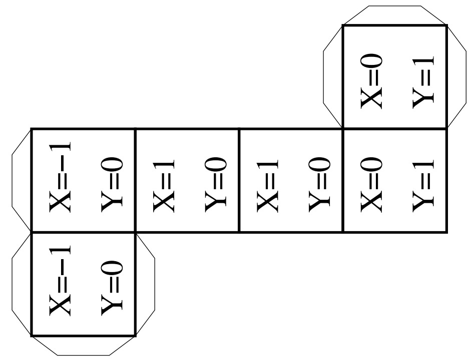
(c) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à $2,5\%$. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

Exercice 3 Une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

(a) On consière que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers qui se présentent effectivement à l'embarquement pour ce vol. Donner la loi de S_n, sa moyenne et sa variance.

(b) Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que $\mathbb{P}(S_n \leqslant 300) \geqslant 0,99$. En utilisant le théorème central limite, proposez une solution approchée de ce problème.

Un jeu Soit $\Omega = \{$Les 6 faces d'un dé$\}$, et soient $X \colon \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ et $Y \colon \Omega \to \{0, 1\}$ les deux variables aléatoires données par le dé dans cette figure. Alors on a vu en cours que X et Y sont dépendantes, bien que $Cov(X, Y) = 0$. (Mais attention, l'équation $Cov(X, Y) = 0$ risque ne plus être vrai si votre dé est biaisé.)



Exercice 4 Une mesure faite sur 5 individus différents a donné comme résultat les 5 nombres réels suivants.

$$2{,}0, \quad 5{,}8, \quad 7{,}3, \quad 3{,}3, \quad 1{,}6$$

Calculer la moyenne et variance empirique.

Exercice 5 Une mesure faite sur 20 individus différents a donné comme résultat les 20 nombres réels

2.58, 3.53, 2.32, 0.69, 3.96, -1.95, 2.98, 2.49, 5.8, 0.45, 7.23, 3.88, 0.86, 5.36, 1.78, 3.29, 4.09, 4.56, 0.41, 2.70.

Dessiner un histogramme avec, comme classes, les intervalles $[-2, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 4]$, $[4, 6]$, et $[6, 9]$. Déterminer aussi la médiane et le premier et troisième quartile.