Université de Rennes 1 — Année 2013–2014

PRSB (Probabilités et Statistiques, L1 Bio)

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Suggérer des méthodes pratiques pour tirer des éléments aléatoires dans les ensembles Ω suivants, selon les probabilités données :

(a) $\Omega = \{\text{Pomme, Poire, Banane}\}$, avec $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{1}{3}$ pour x =Pomme, Poire, ou Banane.

(b) $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{2^k} (= 2^{-k})$.

(c) $\Omega = [0, 1]$, probabilité uniforme.

(d) (Pour rigoler) $\Omega = \{A, B\}$ avec $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ si le seul objet à ma disposition est une pièce d'argent que je soupçonne d'être pipée.

Exercice 2 Déterminer les espérances et variances des lois discrètes suivantes :

(a) L'espérance et la variance de la loi uniforme $\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$. Pour le calcul de la variance vous pouvez admettre la formule $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

(b) L'espérance de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Vous pouvez admettre la formule $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

(c) L'espérance et la variance de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

(d) L'espérance de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Vous pouvez admettre la formule $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{24} + \ldots$

Exercice 3 Déterminer les espérances et variances des lois continues suivantes :

(a) L'espérance et la variance de la loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$. (Le calcul de la variance est désagréable.)

(b) L'espérance de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. (Utiliser intégration par parties.)

(c) L'espérance et la variance de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Vous pouvez admettre la formule $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} = 1$. Vous pourrez encore utiliser l'intégration par parties.

Exercice 4 On lance une pièce de monnaie un certain nombre de fois jusqu'à obtenir "pile". On s'arrête la première fois où on obtient "pile". On touche alors une somme d'argent égale à 2 puissance le nombre de fois qu'on a obtenu "face". On note X cette somme. Quelle est l'espérance de X ?

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Soit X une variable aléatoire réelle de densité :

$$f_X(x) := \begin{cases} 0 \quad \text{pour } x < 0, \\ c \cdot x \cdot \exp(-2x) \quad \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Déterminer la constante c.

(b) Calculer $F_X(x)$, la fonction de répartition de X.

(c) Calculer l'espérance et la variance de X.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ La durée de vie (en minutes) d'une particule élémentaire radioactive peut être modélisée par une variable aléatoire exponentielle, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-x/100} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Quelle est la demie-vie, c.à.d., quelle est la durée après laquelle laquelle la particule a eu 50% de chances de s'être décomposé ?

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Chaque jour, un homme écrit une lettre à sa dulcinée avec probabilité 1 s'il n'a pas écrit la veille, et avec probabilité 1/2 sinon. Montrez qu'il écrit ainsi en moyenne 243 lettres par an.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Soit N un entier. On choisit indépendamment N nombres réels sur l'intervalle $[0, N]$ selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0, N)$. On note X_N le plus petit des nombres obtenus. On va étudier la variable aléatoire X_N :

(a) Pour tout $t \in [0, N]$, calculer $\mathbb{P}(X_N > t)$.

(b) En déduire la fonction de répartition F_{X_N} de X_N.

(c) Pour $t > 0$ fixé, calculer $\lim_{N\to\infty} F_{X_N}(t)$. Indication : vous pouvez admettre la formule (normalement vue en Lycée) : $\lim_{N\to\infty}(1 + \frac{x}{N})^N = e^x$.

(d) Donner un sens exact à la phrase "Pour N très grand, X_N est distribué selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$".