Université de Rennes 1 Année 2013–2014
PRSB (Probabilités et Statistiques, L1 Bio)

Contrôle continu 2
12 mars 2014 - Durée : 40 minutes

Vous pouvez utiliser des calculatrices et une feuille A4 avec vos notes.
En revanche, les téléphones portables sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1 Considérons une variable aléatoire continue X avec densité de probabilité

$$f_X(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer et dessiner la fonction de répartition F_X.

(b) Calculer la probabilité qu'une réalisation de cette variable aléatoire soit comprise entre 0 et 0,5.

(c) Si l'on prend 1000 réalisations indépendantes de cette variable (c.à.d. "on tire 1000 nombres" selon X) combien des nombres tirés, à peu près, seront entre 0 et 0,5 ?

Solution : (a) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$. Si $x < 0$ alors $F_X(x) = 0$. Sinon, $F_X(x) = \int_0^x 2t\,dt$. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $F_X(x) = x^2$, si $x > 1$ alors $F_X(x) = 1$. (b) $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$. Donc parmi les 1000 nombres il y aura à peu près 250 entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 (a) Soit X une variable aléatoire avec $\mathbb{E}(X) = 5$ et $\mathbb{V}(X) = 7$. Soit $Y = 3 - 2 \cdot X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$. (b) Question enlevée à la dernière minute : Mon ordinateur sait engendrer des nombres aléatoires uniformement distribués dans l'intervalle $[0, 1]$ (selon la loi $\mathcal{U}([0, 1])$). Comment fais-je pour créer des nombres aléatoires uniformes dans l'intervalle $[10, 14]$?

Solution : (a) $\mathbb{E}(Y) = 3 - 2 \cdot \mathbb{E}(X) = -7$ et $\mathbb{V}(Y) = (-2)^2 \cdot \mathbb{V}(X) = 4 \cdot 7 = 28$. (b) À chaque nombre engendré par l'ordinateur j'applique la transformation $x \mapsto 10 + 4 \cdot x$.

Exercice 3 J'ai une pièce d'argent (non-pipée) avec un côté marqué "0", l'autre marqué "1". Je jette cette pièce deux fois – les deux lancés sont indépendants. Soit X_1 la variable aléatoire correspondant au premier lancé, et X_2 celle correspondant au deuxième lancé – donc

$$(X_1, X_2) \in \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$$

On définit deux variables aléatoires

$$X = X_1 + X_2 \quad \text{et} \quad Y = \min(X_1, X_2)$$

(a) Calculer l'espérance et la variance de X.

(b) Calculer l'espérance de Y.

(c) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(d) Les deux variables aléatoires sont-elles positivement corrélées, négativement corrélées, ou non-corrélées ? Sont-elles dépendantes ou indépendantes ?

Solution : (a) $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{4}$. Donc $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2}$. (b) $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{4}$, donc $\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. (c) Si $(X_1, X_2) = (0,0)$ alors $X \cdot Y = 0 \cdot 0 = 0$. Si $(X_1, X_2) = (0,1)$ ou $= (1,0)$ alors $X \cdot Y = 1 \cdot 0 = 0$. Si $(X_1, X_2) = (1,1)$ alors $X \cdot Y = 2 \cdot 1 = 2$. Donc $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(X \cdot Y = 0) + 2 \cdot \mathbb{P}(X \cdot Y = 2) - 1 \cdot \frac{1}{4} = 0 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. (d) On a $Cov(X, Y) > 0$, donc elles sont positivement corrélés, et en particulier dépendantes.