Université de Rennes 1 Année 2012–2013
Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

**Examen Terminal**
**Mardi 18 décembre 2012, 8h – 10h**

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdites.
Justifiez toutes vos réponses (sauf mention contraire).
Le barème est donné à titre indicatif.

**Exercice 1** (Pas de justifications exigées pour cet exercice) **8 points**

(a) Soit $\Omega$ un ensemble fini. Donnez la définition d'une *probabilité* sur $\Omega$. C'est une fonction $P$ qui à chaque sous-ensemble $A$ de $\Omega$ associe un nombre $P(A)$, telle que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A$ et $B$ sont disjoints, et telle que $P(\Omega) = 1$

(b) Soit $X$ une variable aléatoire sur l'ensemble $\Omega$. Dire que $X$ suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, 7\}$ signifie que ... (Donnez la définition) $P(X = 1) = \ldots = P(X = 7) = \frac{1}{7}$

(c) Soit $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire avec $\mathbb{E}(X) = 5$ et $\mathbb{V}(X) = 4$. Quelle est l'espérance et la variance de la variable aléatoire $3X + 2$ ? $\mathbb{E}(X) = 17$, $\mathbb{V}(X) = 36$

(d) Supposons que $Y$ est une variable aléatoire avec $P(Y = -1) = \frac{2}{3}$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$. Dessiner le graphe de la fonction de répartition de la loi de $Y$.

(e) Je jette plusieurs fois un dé, jusqu'à la première apparition de "6". Quelle est la probabilité que cette première apparition de "6" est exactement au $k$-ème jet ($k = 1, 2, 3, \ldots$) ? Quel est le nom de la loi décrivant le nombre de jets jusqu'au premier "6" ? Et quelle est l'espérance de cette loi ? $(\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. C'est une loi géométrique, $\mathcal{G}(\frac{1}{6})$, qui est d'espérance 6.

(f) Énoncez la loi (faible) des grands nombres. On va donner des points partiels pour tout énoncé qui va dans le bon sens : si $X_1, \ldots, X_n$ sont tirés selon une même loi, alors si $n$ était assez grand, leur moyenne est probablement proche de l'espérance de la loi.

(g) Donner la densité de la loi normale d'espérance 3 et de variance 16. $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$

**Exercice 2** Une pièce d'argent juste (non-pipée) est jeté deux fois. Considérons les événements $M$ = deux fois le même résultat (PP ou FF), et $D$ = le deuxième jet donne Face (PF ou FF). Les événements $M$ et $D$ sont-ils indépendants ? Oui, car $P(M) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $P(M \cap D) = P((FF)) = \frac{1}{4}$, aussi. **1 point**

**Exercice 3** Parmi un groupe de 10 personnes (5 femmes, 5 hommes) je sélectionne 3 personnes au hasard. Combien de combinaisons (sélections différentes, sans faire attention **2 points**

à l'ordre), y a-t-il ? Combien d'entre elles contiennent exactement 2 femmes et 1 homme ? $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 5\cdot 3\cdot 8 = 120$ combinaisons. Il y a $C_5^2 \cdot C_5^1 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 5 = 50$ sélections avec 2 femmes et 1 homme.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ On considère une pièce dont les deux côtés sont marqués "0" et "1". On jette cette pièce deux fois – on a donc un univers $\Omega = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$, dont chaque élément apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$. Considérons les deux variables aléatoires

$$X((i,j)) = \min(i,j) \quad \text{et} \quad Y(i,j) = i+j$$

**1 point** (a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. $\mathbb{E}(X) = 0\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

**2 points** (b) Calculer la covariance $Cov(X,Y)$. $= \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) \overset{*}{=} P(1,1)\cdot X(1,1)\cdot Y(1,1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ où l'égalité $\overset{*}{=}$ vient du fait que $X(i,j) = 0$ sauf si $(i,j) = (1,1)$.

**1 point** (c) Les deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ? Non, car $Cov(X,Y) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ J'ai deux pièces d'argent, $A$ et $B$ qui se ressemblent parfaitement. Or, pour la pièce $A$, la probabilité d'obtenir "Face" est de $\frac{1}{4}$, tandis que pour la pièce $B$, la probabilité de "Face" est de $\frac{3}{4}$. On choisit une des deux pièces au hasard, et on la jette deux fois. Le résultat des deux jets est "Face".

**2 points** (a) Montrer que le probabilité que la pièce choisie était la pièce $B$ est de $\frac{9}{10}$. Indication : on pourra utiliser la formule de Bayes. Notons les événements $B =$pièce $B$ (donc $B^c =$pièce $A$), et $F =$deux jets "Face". Alors

$$P(B|F) = \frac{P(F|B)\cdot P(B)}{P(F|B)\cdot P(B) + P(F|B^c)\cdot P(B^c)} = \frac{\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{9}{10}$$

**1 point** (b) (difficile) Quelle est la probabilité qu'un troisième jet avec la même pièce donne encore "Face" ? Notons $T$ l'événement "le troisième jet donne Face". Alors

$$P(T|F) = P(T|B)\cdot P(B|F) + P(T|B^c)\cdot P(B^c|F) = \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$$

**2 points** $\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Calculer l'espérance et la médiane de la loi de densité

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $X$ est une v.a. suivant cette loi, alors $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 2x \; dx = [\frac{2}{3}x^3]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$. Pour la médiane, calculer d'abord la fonction de répartition $F_X(t) = \int_0^t 2x \; dx = t^2$. La médiane $m$ satisfait $F_X(m) = \frac{1}{2}$, donc $m = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7071$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ (Inégalités de Markov et Chebyshev) Dans une manufacture, la fabrication d'un certain objet dure en moyenne 10 minutes - formellement, la durée de fabrication est une variable aléatoire $X$ avec $\mathbb{E}(X) = 10$.

(a) Donner une borne supérieure sur la probabilité que la fabrication dure 15 minutes ou plus. On doit d'abord observer que $X$ ne prend que des valeurs positives (pas de durée négative !). On peut donc appliquer l'inégalité de Markov : $P(X \geqslant 15) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{15} = \frac{2}{3}$. **1 point**

(b) Si l'on sait en plus que l'écart-type $\sigma(X)$ est de 2 minutes, que pouvez vous dire sur la probabilité que la durée de fabrication soit comprise entre 7 et 13 minutes ? $P(|X - 10| < 3) = 1 - P(|X - 10| \geqslant 3) \overset{Tchebychev}{\geqslant} 1 - \frac{\sigma(X)^2}{3^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Donc la probabilité en question est au moins $\frac{5}{9}$. **1 point**