Université de Rennes 1 Année 2012–2013
Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Feuille d'exercices 8

Exercice 1 Soient X et Y, deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p, $0 < p < 1$, indépendantes. On définit les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

(a) Les variables S et D, sont-elles indépendantes ?

(b) Calculer $Cov(S, D)$.

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Trouver la loi de $X + Y$ si

(a) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ (lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2). Indication : la réponse est que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

(b) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$. Indications : la réponse est que $X + Y$ suit également une loi binomiale : $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. Vous avez le droit d'admettre la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k \cdot C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$$

Exercice 3 On jette deux dés. Soient X et Y respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs obtenues.

(a) Calculer la loi de probabilité conditionnelle de Y, sachant que $(X = i)$, pour $i = 1, 2, \ldots, 6$.

(b) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 Soient $X \colon \Omega \to \{0, 2, 4\}$ et $Y \colon \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$ deux variables aléatoires. Nous supposons que les probabilités $P(X = i, Y = j)$ sont comme indiqués dans le tableau suivant.

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	2/48	6/48	3/48	1/48
2	4/48	12/48	6/48	2/48
4	2/48	6/48	3/48	1/48

(a) Déterminer la loi de X. Déterminer la loi de Y.

(b) Les variables aléatoires X et Y, sont-elles indépendantes ?